Е. Н. АКСЕНОВА

ОБЩАЯ ФИЗИКА. МЕХАНИКА (ГЛАВЫ КУРСА)

Учебное пособие

Издание второе, исправленное

ЛАНЬ®

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2018

ББК 22.2я73
А 42

Аксенова Е. Н.

А 42 Общая физика. Механика (главы курса): Учебное пособие. — 2-е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2018. — 128 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-2927-1

Этот курс лекций по общей физике является результатом многолетней преподавательской деятельности доцента, кандидата физико-математических наук Е. Н. Аксеновой при работе со студентами МИФИ. Он создан по просьбе и при технической поддержке самих студентов. Отличительной особенностью этого курса является его интерактивный характер, заключающийся в том, что материал каждой темы в процессе его изложения содержит четко сформулированные качественные вопросы. Они помогают понять физические нюансы изучаемого материала и выработать личное суждение по данному вопросу, а затем сравнить его с приведенным далее правильным ответом. Кроме того, курс ставит своей целью научить читателя пользоваться изложенным материалом применительно к решению задач, построив мостик между «узнал, понял» и «могу использовать, решать». Поэтому каждый раздел содержит параграф, посвященный методике решения задач с последовательным изложением программы практических действий.

Пособие предназначено для студентов вузов всех форм обучения и направлений подготовки, входящих в УГС: «Физика и астрономия», «Электроника, радиотехника и системы связи», «Электро- и теплотехника», «Физико-технические науки и технологии», «Машиностроение», «Технологии материалов», «Авиационная и ракетно-космическая техника», и других физико-математических и инженерно-технических направлений. Книга также будет полезна учителям общеобразовательных школ и учащимся физико-математических классов.

ББК 22.2я73

Обложка
Е. А. ВЛАСОВА

I. Кинематика

I.1. Кинематика материальной точки

1. Основные понятия кинематики

Кинематика изучает способы описания движения, не вдаваясь в причины, его порождающие. ЧТО? ГДЕ? КОГДА? – это вопросы кинематики.

Интерес к кинематике возрос с расширением применения пороха (с XIII в. в Европе и России).

Галилей в 1600 г. заново изложил основы баллистики, согласующиеся с практикой для тяжёлых ядер, летящих с малой скоростью.

Галилею принадлежит принцип относительности: движение относительно, то есть понятие абсолютного движения в абсолютном пространстве лишено содержания. Для описания движения необходимо выбрать систему отсчёта.

Тело или система тел, неподвижных друг относительно друга, относительно которых рассматривается положение других тел, называется пространственной системой отсчёта.

Птолемей утверждал, что Земля – центр Вселенной и она неподвижна. Он предложил геоцентрическую систему.

Коперник предложил гелиоцентрическую систему, в которой Солнце неподвижно.

Обе системы правомерны с точки зрения принципа относительности Галилея. (К слову сказать, Дж. Бруно взошёл на костёр инквизиции не из-за предпочтения им гелиоцентрической системы отсчёта, как часто излагается в курсах истории, а из-за нарушения монашеского обета доминиканца.)

Определим основные понятия, с которыми будем работать.

Материальная точка (частица) – объект, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь, то есть размер частицы гораздо меньше характерных линейных параметров задачи.

С точки зрения движения планет вокруг Солнца они являются материальными точками и классическими объектами.

$$\left.\begin{aligned} &d_{Земли} = 1{,}24\cdot 10^{7}\,м = 12{,}4\cdot 10^{3}\,км \\ &l_{Солнце-Земля} = 1{,}50\cdot 10^{11}\,м = 150\cdot 10^{6}\,км \\ &d_{Солнца} = 1.5\cdot 10^{6}\,км \end{aligned}\right\}\; l_{Солнце-Земля} >> d_{Солнца} >> d_{Земли}.$$

Чтобы описать движение материальной точки, нужно указать её положение в пространстве в любой момент времени.

Число независимых величин, которые нужно задать, чтобы определить конфигурацию системы, то есть взаимное расположение всех частей этой системы в пространстве в любой момент времени, называется числом степеней свободы этой системы.

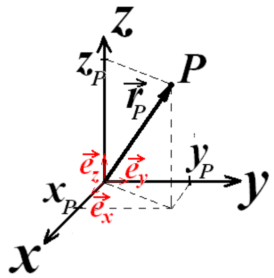
У материальной точки нет частей, и в нашем трёхмерном пространстве она имеет три степени свободы. Следовательно, для описания её движения в пространстве нужна система координат, задающая три независимые переменные.

Наиболее часто используемые системы координат: декартова, цилиндрическая и сферическая.

<u>Системы координат.</u>

1) *Декартова система координат представляет собой три взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через одну общую точку – начало отсчёта.*

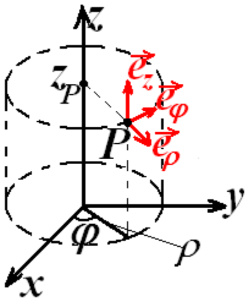
Правая система: поворачиваем винт или буравчик с правой резьбой (любая шариковая ручка) в плоскости (x, y) по кратчайшему пути от x к y и по поступательному движению винта получаем направление z.



Три независимых параметра точки P суть координаты этой точки (x_P, y_P, z_P) по соответствующим осям.

Радиус-вектор точки Р, определяющий её положение в пространстве, $\vec{r}_P = x_P\vec{e}_x + y_P\vec{e}_y + z_P\vec{e}_z$.

$\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ – *базис декартовой системы координат состоит из единичных векторов, направленных вдоль осей системы. Разложение любого вектора по базису единственно.*



2) *Цилиндрическая система координат* (ρ, φ, z) *с базисом* $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$.

Любая точка P представляется как точка на цилиндрической поверхности так, что:

$$\vec{r}_p = \rho\cos\varphi \cdot \vec{e}_x + \rho\sin\varphi \cdot \vec{e}_y + z\vec{e}_z;$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2};$$

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z.$$

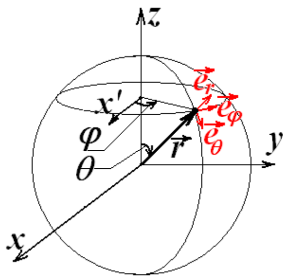
3) *Сферическая система координат* (r, φ, θ) *с базисом* $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta\}$. При этом:

$x = r\sin\theta \cdot \cos\varphi;$

$y = r\sin\theta \cdot \sin\varphi;$

$z = r\cos\theta;$

$\vec{r} = r\sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot \vec{e}_x + r\sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot \vec{e}_y + r\cos\theta \cdot \vec{e}_z.$



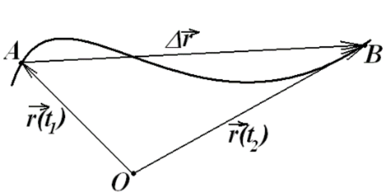
Выбор системы координат определяется симметрией задачи.

2. Траектория. Перемещение. Путь

Траектория – это линия, которую описывает при своём движении в пространстве материальная точка.

Для её описания достаточно задать радиус-вектор частицы в декартовой системе $\vec{r} = \vec{r}(t)$ или функциональную зависимость от времени координат $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}.$

Траектория – краеугольный камень, на котором основано отличие ньютоновской механики от квантовой. В квантовой механике у элементарных частиц нет траектории.

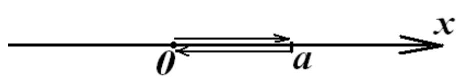


Перемещением частицы за время от t_1 *до* t_2 *называется приращение её радиуса-вектора* $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{r}_{AB}$.

Перемещение – векторная величина.

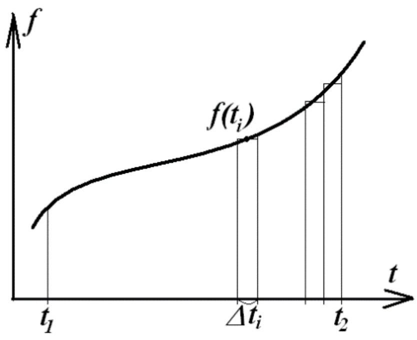
Путь S, по определению, равен длине траектории, пройденной частицей за время от момента t_1 *до момента* t_2. *Путь – скалярная величина.*

Пример. Пусть частица движется по закону $x = a\sin\omega t$, $t_1 = 0$, $t_2 = \dfrac{T}{2}$ $\Rightarrow$ $\Delta\vec{r}_{21} = 0$, $S_{21} = 2a$.



3. Определение средних по времени величин

Пусть необходимо определить среднее значение функции $f(t)$ на временном отрезке от t_1 до t_2.



$(t_2 - t_1)$ разбиваем на малые отрезки Δt_i, тогда $\sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = t_2 - t_1$.

Образуем сумму $\sum f(t_i)\Delta t_i$.

Предельный переход $\Delta t_i \to 0$ преобразует сумму в интеграл, который определяет собой площадь под кривой, так что:

$$\langle f(t) \rangle\Big|_{t_1}^{t_2} \approx \frac{1}{t_2 - t_1} \sum f(t_i)\Delta t_i \to \lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt.$$

Итак, *среднее значение* $\langle f(t) \rangle\Big|_{t_1}^{t_2} = \dfrac{1}{t_2 - t_1} \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt.$

Если усредняем на отрезке $[t, t+\Delta t]$, то:

$$\langle f(t) \rangle\Big|_{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t}^{t+\Delta t} f(t)dt.$$

Аналогично для векторных величин:

$$\langle \vec{a}(t) \rangle\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)dt.$$

Так же находится *среднее значение любой функции $\vec{a}$ по любому аргументу ξ:*

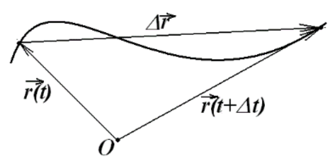
$$\langle \vec{a}(\xi) \rangle\Big|_{\xi_1}^{\xi_2} = \frac{1}{\xi_2 - \xi_1} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \vec{a}(\xi)d\xi.$$

4. Скорость

Мгновенная скорость $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$

Средняя скорость равна отношению перемещения ко времени, за которое это перемещение совершено:

$$\langle \vec{\upsilon} \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{t}^{t+\Delta t} \vec{\upsilon} dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{t}^{t+\Delta t} \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$



В декартовой системе координат:

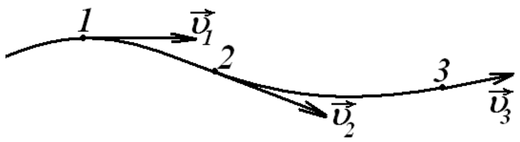
$$\begin{cases} \vec{\upsilon} = \dfrac{d}{dt}\left(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z\right) = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z = \upsilon_x\vec{e}_x + \upsilon_y\vec{e}_y + \upsilon_z\vec{e}_z; \\ \upsilon_x = \dot{x},\ \upsilon_y = \dot{y},\ \upsilon_z = \dot{z}; \\ |\vec{\upsilon}| = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} - \textit{модуль мгновенной скорости.} \end{cases}$$

Точкой, поставленной над физической величиной, будем в дальнейшем обозначать производную этой величины по времени.

В пределе при $\Delta t \to 0$ путь S и перемещение $\left|\Delta\vec{r}\right|$ совпадают, поэтому модуль или величина мгновенной скорости может быть определена как производная пути по времени:

$$\left|\vec{\upsilon}\right| = \upsilon = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{dS}{dt}.$$

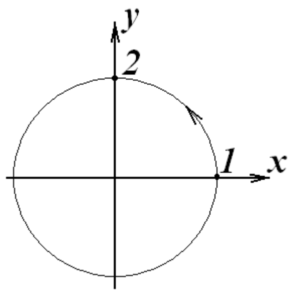
Вектор $\vec{\upsilon}$ в любой точке траектории ориентирован по направлению движения и совпадает с касательной к траектории в данной точке.



$\left\langle\left|\vec{\upsilon}\right|\right\rangle = \dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_t^{t+\Delta t}\dfrac{dS}{dt}dt = \dfrac{S(\Delta t)}{\Delta t}$ – средний модуль скорости $\equiv$ средняя путевая скорость.

Пример.

Тело движется равномерно по окружности $O(R)$ против часовой стрелки с периодом обращения T.



Найти: $\langle\vec{\upsilon}\rangle$, $\left|\langle\vec{\upsilon}\rangle\right|$, $\left\langle\left|\vec{\upsilon}\right|\right\rangle$ *за* $\dfrac{T}{4}$.

Решение.

$$\langle\vec{\upsilon}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{-R\cdot\vec{e}_x + R\cdot\vec{e}_y}{\frac{T}{4}} = \frac{4R}{T}\left(\vec{e}_y - \vec{e}_x\right),$$

$$\left|\langle\vec{\upsilon}\rangle\right| = \frac{4\sqrt{2}R}{T}, \qquad \left\langle\left|\vec{\upsilon}\right|\right\rangle = \frac{2\pi R}{T}.$$

Следовательно, $\left|\langle\vec{\upsilon}\rangle\right| < \left\langle\left|\vec{\upsilon}\right|\right\rangle = \langle\upsilon\rangle$, что вполне очевидно, так как модуль средней скорости определяется длиной отрезка 12, а средней модуль скорости – длиной дуги 12, которая больше длины отрезка 12.

5. Ускорение

Мгновенное ускорение $\vec{w} \equiv \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

В декартовой системе координат ускорение имеет вид:

$$\vec{w} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\vec{e}_x + \frac{d\upsilon_y}{dt}\vec{e}_y + \frac{d\upsilon_z}{dt}\vec{e}_z = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z = w_x\vec{e}_x + w_y\vec{e}_y + w_z\vec{e}_z.$$

При этом *компоненты ускорения в декартовой системе координат* имеют следующее выражение:

$w_x = \dot{\upsilon}_x = \ddot{x}$;

$w_y = \dot{\upsilon}_y = \ddot{y}$;

$w_z = \dot{\upsilon}_z = \ddot{z}$.

Модуль мгновенного ускорения $\left|\vec{w}\right| = w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$.

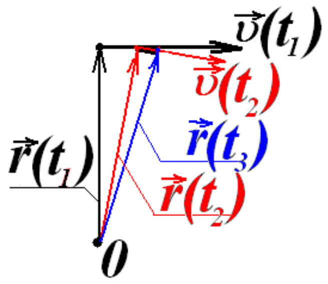
$\langle\vec{w}\rangle = \dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_t^{t+\Delta t}\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}dt = \dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$ – *среднее ускорение за время* Δt.

6. Обратная задача

Пусть известна зависимость скорости частицы $\vec{\upsilon}(t)$ от времени и её местоположение $\vec{r}(t_1)$ в начальный момент времени. Требуется найти зависимость ускорения $\vec{w}(t)$ и радиуса-вектора $\vec{r}(t)$ частицы от времени.

Дано: $\vec{r}(t_1)$, $\vec{\upsilon}(t)$.

Найти: $\vec{w}(t)$, $\vec{r}(t)$ $t > t_1$.



Решение:

$\Delta\vec{r}_1 = \vec{\upsilon}(t_1)\Delta t_1$;

$\vec{r}_2 = \vec{r}(t_1) + \vec{\upsilon}(t_1)\Delta t_1$, $\Delta\vec{r}_2 = \vec{\upsilon}(t_2)\Delta t_2$;

$\vec{r}(t_3) = \vec{r}(t_1) + \vec{\upsilon}(t_1)\Delta t_1 + \vec{\upsilon}(t_2)\Delta t_2$;

………………………………

$$\vec{r}(t_n) = \vec{r}(t_1) + \sum_{i=1}^{n-1} \vec{\upsilon}(t_i)\Delta t_i .$$

После предельного перехода $\Delta t_i \to 0$ получим $\vec{r}(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{\upsilon}(t)dt$.

Таким образом, *местоположение частицы определяется её радиусом-вектором*

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{\upsilon}(t)dt .$$

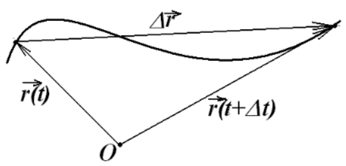
Ускорение $\vec{w}(t) = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$.

7. Способы описания движения

1) *Векторный*

Задана зависимость $\vec{r}(t)$, то есть геометрическое место точек концов радиуса-вектора суть траектория. Тогда скорость и ускорение определяются следующим образом:

$$\vec{\upsilon}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt};$$



$$\vec{w} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

2) *Координатный*

Заданы временные зависимости координат частицы в декартовой системе $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Тогда:
$$\vec{r} = x\cdot\vec{e}_x + y\cdot\vec{e}_y + z\cdot\vec{e}_z,$$
$$\vec{\upsilon} = \dot{x}\cdot\vec{e}_x + \dot{y}\cdot\vec{e}_y + \dot{z}\cdot\vec{e}_z,$$
$$\vec{w} = \ddot{x}\cdot\vec{e}_x + \ddot{y}\cdot\vec{e}_y + \ddot{z}\cdot\vec{e}_z.$$

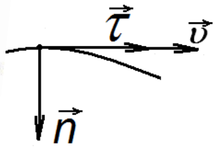
3) *Естественный*

Пусть задана траектория и положение на ней частицы в любой момент времени. Такой способ – естественный, так как в любой момент времени существует своя система координат, один из ортов которой совпадает с направлением движения, то есть с направлением скорости.

Для простоты ограничимся рассмотрением плоских траекторий.

<u>Вопрос.</u> Сколько степеней свободы у частицы, совершающей плоское движение?

<u>Ответ.</u> Две, так как необходимо иметь две независимые оси координат, по которым можно раскладывать движение.



В любой момент времени $\bar{\upsilon} = \upsilon \cdot \bar{\tau}$, *где* $\bar{\tau}$ *– единичный вектор в направлении движения* $|\bar{\tau}| = 1$.

Введем единичный вектор $\bar{n}$, *направленный к центру кривизны траектории:* $\bar{n} \perp \bar{\tau}$, $|\bar{n}| = 1$.

Локальные характеристики траектории:

а) Центр кривизны траектории суть центр окружности для траектории в данной точке.

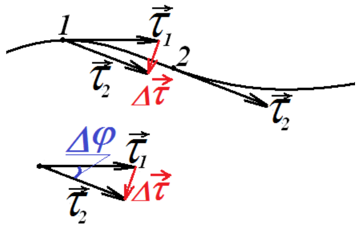
б) Расстояние от точки на траектории до центра кривизны называется радиусом кривизны в данной точке.

$C \equiv \dfrac{d\varphi}{dS} = \dfrac{1}{R_{кр}}$ *– кривизна кривой.*

Для плоской кривой *y(x)* кривизна в каждой ее точке определяется следующим выражением:

$$C = \frac{y''}{\left(\sqrt{1+y'^2}\right)^3}.$$

Полное ускорение можно представить в виде $\vec{w} = \dfrac{d\bar{\upsilon}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\upsilon \cdot \bar{\tau}) = \dfrac{d\upsilon}{dt}\bar{\tau} + \upsilon\dfrac{d\bar{\tau}}{dt}$.



Здесь тангенциальное ускорение $w_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt}$ *"отвечает" за изменение модуля скорости.*

Выясним, что такое $\dfrac{d\bar{\tau}}{dt}$.

$$|\Delta\bar{\tau}| = 2|\bar{\tau}|\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx 1 \cdot \Delta\varphi.$$

Здесь $\Delta\varphi$ – угол поворота единичного вектора $\bar{\tau}$ за время Δt.

Тогда $\dfrac{d\tau}{dt} = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{d\varphi}{dS}\dfrac{dS}{dt} = \upsilon\dfrac{1}{R_{кр}} \Rightarrow \upsilon\dfrac{d\bar{\tau}}{dt} = \dfrac{\upsilon^2}{R_{кр}}\bar{e}.$

Нужно выяснить направление $\bar{e}$.

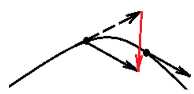
Докажем, что $\dfrac{d\bar{\tau}}{dt} \perp \bar{\tau}$.

Если два вектора взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю $\dfrac{d\bar{\tau}}{dt} \cdot \bar{\tau} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\bar{\tau}^2}{2}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\tau^2}{2}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$. Следовательно, $\dfrac{d\bar{\tau}}{dt} \perp \bar{\tau}$.

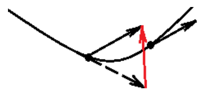
Осталось выяснить $\dfrac{d\bar{\tau}}{dt} \uparrow\uparrow \bar{n}$ или $\dfrac{d\bar{\tau}}{dt} \uparrow\downarrow \bar{n}$.

<u>Вопрос.</u>

1) Если $d\varphi < 0$, куда направлена выпуклость кривой?



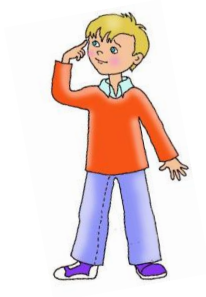
<u>Ответ.</u> Так как положительное направление отсчёта углов против часовой стрелки, то выпуклость вверх, $\Rightarrow$ $d\bar{\tau}$ направлен вниз и, следовательно, сонаправлен с $\bar{n}$: $\dfrac{d\bar{\tau}}{dt} \downarrow\downarrow \bar{n}$.



2) Если $d\varphi > 0$, то выпуклость вниз и $\Rightarrow$ $d\bar{\tau}$ направлен вверх и тоже сонаправлен с $\vec{n}$: $\dfrac{d\bar{\tau}}{dt} \uparrow\uparrow \vec{n}$.

Таким образом, $\dfrac{d\bar{\tau}}{dt} = \dfrac{d\varphi}{dt}\vec{n}$, следовательно, $\upsilon\dfrac{d\bar{\tau}}{dt} = \dfrac{\upsilon^2}{R_{кр}}\vec{n}$.

<u>Выводы.</u> *Полное ускорение* $\vec{w} = \dfrac{d\upsilon}{dt}\bar{\tau} + \dfrac{\upsilon^2}{R}\vec{n} = w_\tau\bar{\tau} + w_n\vec{n}$, где



$w_n = \dfrac{\upsilon^2}{R}$ – *нормальное ускорение, оно “отвечает” за изменение направления скорости и <u>всегда</u> направлено к центру кривизны траектории.*

$w_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt}$ – *тангенциальное ускорение, оно “отвечает” за изменение модуля скорости.*

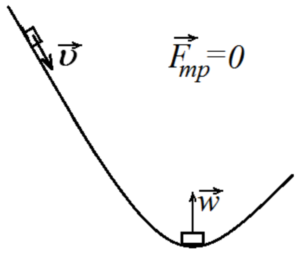
$\vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n$ – *верно для любой пространственной траектории.*

8. Качественные вопросы

1. Как движется частица, если

а) $w_\tau = const \begin{cases} > 0 - \textit{равноускоренно} \\ = 0 - \textit{равномерно} \\ < 0 - \textit{равнозамедленно} \end{cases}$;

б) $w_n = const \begin{cases} > 0 - \textit{по окружности } R \\ = 0 - \textit{по прямой} \\ < 0 - \textit{это невозможно} \end{cases}$.

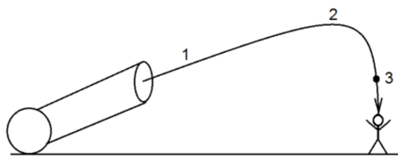


2. Тело скользит по желобу без трения. Куда направлено ускорение в нижней точке?

<u>Ответ.</u> В нижней точке $w_\tau = 0$, w_n направлено только к центру кривизны траектории, то есть вверх.

3. *Пример плоской траектории – траектория тела, брошенного под углом к горизонту.*

Тело движется по параболе под действием силы тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$, следовательно, в любой точке $\vec{w} = \vec{g} = w_\tau\bar{\tau} + w_n\vec{n}$.



Задача о теле, брошенном под углом к горизонту, – задача, наиболее интересная баллистикам.

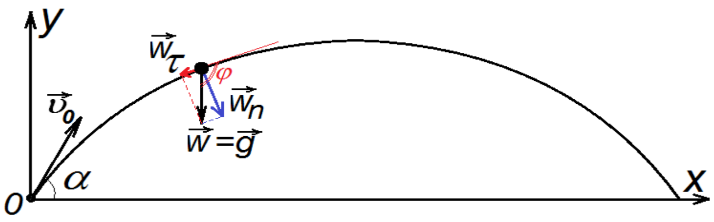
Представления до Галилея были занимательны: снаряды летят по траектории, делящейся на три части:

а) насильственное движение (по прямой);

b) смешанное движение;

c) естественное движение, при котором ядро падает на солдат противника.

Считали, что скорость прямо пропорциональна действующей силе. Галилей заново изложил основы баллистики, но, когда к его словам наконец прислушались, ядра уже летали так быстро, что силой сопротивления нельзя было пренебрегать и требовалось снова пересматривать законы баллистики.



Учтём независимость горизонтального и вертикального движений:

$$\vec{\upsilon}_0 = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot \vec{e}_x + \upsilon_0 \sin\alpha \cdot \vec{e}_y .$$

В горизонтальном направлении (вдоль оси x) тело движется равномерно со скоростью $\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha .$

По вертикальной оси y тело движется равнозамедленно (так как действует сила $m\vec{g} \uparrow\downarrow \vec{\upsilon}_{Oy}$) до остановки, а затем равноускоренно вниз со скоростью $\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt$. Требуется в произвольный момент t_0 найти $R_{кр}$, w_n, w_τ.

Решение.

Скорость тела в момент времени t_0: $\vec{\upsilon}(t_0) = (\upsilon_0 \sin\alpha - gt_0)\cdot \vec{e}_y + \upsilon_0 \cos\alpha \cdot \vec{e}_x$.

Надо найти проекцию $\vec{w}$ на направление скорости, так как эта проекция равна w_τ:

$$w_\tau = -g\cos\varphi = g\frac{(\vec{g},\vec{\upsilon})}{g\cdot|\vec{\upsilon}|} = -g\frac{g(\upsilon_0 \sin\alpha - gt_0)}{g\sqrt{(\upsilon_0\cos\alpha)^2 + (\upsilon_0 \sin\alpha - gt_0)^2}} =$$

$$= -\frac{g(\upsilon_0 \sin\alpha - gt_0)}{\sqrt{\upsilon_0^2 + g^2 t_0^2 - 2gt_0\upsilon_0 \sin\alpha}} = -\frac{g\upsilon_y}{\sqrt{\upsilon_y^2 + \upsilon_x^2}}.$$

Эта формула удобна для вычисления w_τ и w_n в верхней и нижней точках.

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = \sqrt{g^2 - w_\tau^2}.$$

Верхняя точка: $\left.\begin{matrix} w_\tau = 0 \\ w_n = g \end{matrix}\right\} \to R_{кр} = \dfrac{(\upsilon_0 \cos\alpha)^2}{g}.$

Нижняя точка: $w_\tau = -\dfrac{g\upsilon_0 \sin\alpha}{\upsilon_0}$, $w_n = g\cos\alpha \to R_{кр} = \dfrac{\upsilon_0^2}{g\cos\alpha}.$

4. Имеют ли смысл следующие интегралы и что они определяют?

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{\upsilon}dt = \Delta\vec{r}; \quad \int_{t_1}^{t_2} \upsilon_x dt = \Delta x; \quad \int_{t_1}^{t_2} |\vec{w}|dt \neq;$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{w}dt = \Delta\vec{\upsilon}; \quad \int_{t_1}^{t_2} w_n dt \neq; \quad \int_{t_1}^{t_2} w_\tau dt = \Delta\upsilon; \quad \int_{t_1}^{t_2} |\vec{\upsilon}|dt = S.$$

5. Дано: $\frac{d\upsilon}{dt} = f(S)$ и υ_0.

Найти: $\upsilon(S) - ?$

Решение: $\begin{cases} \frac{d\upsilon}{dt} = f(S) \\ \frac{dS}{dt} = \upsilon \end{cases} \Rightarrow \upsilon = \int f(S)dt.$

Но так интегрировать нельзя, так как S является неизвестной функцией t, следовательно, нужно выразить dt через dS:

$$\frac{d\upsilon}{dS}\upsilon = f(S).$$

После разделения переменных имеем:

$$\frac{1}{2}\upsilon^2\Big|_{\upsilon_0}^{\upsilon} = \int_0^S f(S)dS \Rightarrow \upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2\int_0^S f(S)dS\ .$$

Ответ: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2\int_0^S f(S)dS}$.

Что необходимо знать и уметь по теме «Кинематика материальной точки»:

- знать чёткие определения и связь (интегральную и дифференциальную) между $\Delta\vec{r},\ S,\ \vec{\upsilon},\ \vec{w}$;
- уметь находить средние величины $\langle\vec{\upsilon}\rangle$, $\langle\upsilon\rangle$, $\langle\vec{w}\rangle$, $\langle w_\tau\rangle$ для движения по прямой, окружности, произвольной траектории;
- уметь определять $R_{кр},\ w_n,\ w_\tau$ для движения по окружности радиуса R и для тела, брошенного под углом к горизонту;
- по начальным данным и $\vec{r}(t)$, $\vec{\upsilon}(t)$ или $\vec{w}(t)$ уметь восстанавливать остальные характеристики;
- уметь восстанавливать остальные кинематические зависимости, зная одну из связей, например $\upsilon(S)$.

<u>I.2. Кинематика твёрдого тела</u>

1. Поступательное движение твёрдого тела

<u>Опред.</u> *Абсолютно твёрдое тело – тело, деформациями которого можно пренебречь в условиях данной задачи.*

<u>Опред.</u> *Поступательное движение твёрдого тела – движение, при котором:*

- *за любой произвольно взятый промежуток времени все точки тела приобретают равные по величине и направлению перемещения;*
- *любая прямая, жёстко связанная с телом, остаётся параллельной самой себе в процессе движения.*

Так как при поступательном движении все точки тела совершают за одно и то же время одинаковое перемещение, следовательно, все точки тела имеют одинаковую скорость $\vec{\upsilon}$ и ускорение $\vec{w}$, при этом *задача о поступательном движении твердого тела сводится к задаче о движении материальной точки.*

2. Степени свободы абсолютно твёрдого тела

<u>Опред.</u> *Число степеней свободы – число независимых величин* i, *которые нужно задать, чтобы определить конфигурацию системы, то есть взаимное расположение в пространстве всех частей системы в любой момент времени.*

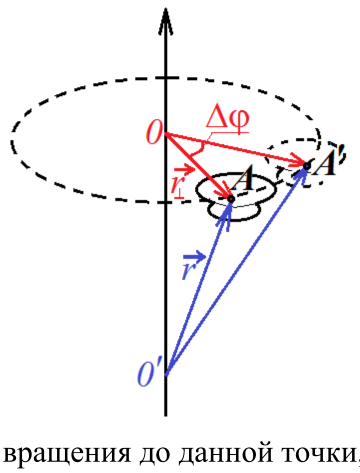
У твёрдого тела:

- шар $\rightarrow i = 3 = i_{поступ}$;
- стержень $\rightarrow i = i_{поступ} + i_{вр} = 3 + 2 = 5$;
- тело произвольной формы $\rightarrow i = i_{поступ} + i_{вр} = 3 + 3 = 6$.

Система из N материальных точек имеет $3N$ степеней свободы, то есть $i = 3N$ (так как любая точка имеет по три степени свободы).

3. Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси

<u>Опред.</u> *Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси – такое движение твёрдого тела, при котором все точки тела описывают окружности, центры которых лежат на данной оси, а сами точки окружностей принадлежат плоскостям, перпендикулярным данной оси.*



Приращение радиуса-вектора точки A $|\Delta\vec{r}| = 2r_{\perp}\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2} \approx r_{\perp}\Delta\varphi$,

так как при $\dfrac{\Delta\varphi}{2} < 5^{\circ}$ $\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2} \approx \dfrac{\Delta\varphi}{2}$.

Устремив $\Delta\varphi$ к 0, получим $\lim\limits_{\Delta\varphi\to 0}|\Delta\vec{r}| = |d\vec{r}| = r_{\perp}d\varphi$.

$d\vec{r} \perp \vec{r}_{\perp}$ и $d\vec{r} \perp$ плоскости $OO'A$ <u>всегда.</u>

<u>Вопрос.</u> Когда полученный вектор перпендикулярен плоскости?

<u>Ответ.</u> Если полученный вектор будет равняться векторному произведению векторов, принадлежащих этой плоскости. Один вектор $\vec{r}_{\perp}$, определяющий расстояние от оси вращения до данной точки, а второй вектор $d\vec{\varphi}$ связан с осью вращения, он вводится условно.

$d\vec{\varphi}$ *характеризуется угловым размером дуги, которую описывает данная точка за время* dt, *и направлен параллельно оси вращения, его направление определяется по правилу правого* *винта в правовинтовой системе* (вращение по часовой стрелке в горизонтальной плоскости даёт направление $d\vec{\varphi}\downarrow$ вниз, вращение против часовой стрелки в горизонтальной плоскости дает направление $d\vec{\varphi}\uparrow$ вверх).

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}_\perp] = [d\vec{\varphi}, \vec{r}],$$

где $\vec{r}$ *– расстояние от произвольной точки оси вращения до данной точки тела.*

$d\vec{\varphi}$ – *псевдовектор* или аксиальный вектор.

Обычные векторы называются полярными или истинными.

Отличие псевдовектора от истинного заключается в том, что при инверсии системы координат координаты истинного вектора изменяют свой знак, а компоненты (аксиального) псевдовектора не изменяются.

Если $\vec{a}$ – полярный вектор, то, имея координаты (x, y, z), в инверсионной системе координат он будет иметь координаты: $x' = -x,\ y' = -y,\ z' = -z$.

Докажем, что если $\vec{a}_1$ – аксиальный вектор $\vec{a}_1 = [\vec{b}, \vec{c}]$, где $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ и $\vec{c}(c_x, c_y, c_z)$ – полярные векторы, то координаты вектора $\vec{a}_1$ в инверсной системе координат не изменятся.

$$\vec{a}_1 = [\vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x(b_y c_z - b_z c_y) - \vec{e}_y(b_x c_z - b_z c_x) + \vec{e}_z(b_x c_y - b_y c_x).$$

В инверсионной системе координат $\vec{b}'(-b_x, -b_y, -b_z)$ и $\vec{c}'(-c_x, -c_y, -c_z)$.

$$\vec{a}_1' = [\vec{b}', \vec{c}'] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x' & \vec{e}_y' & \vec{e}_z' \\ -b_x & -b_y & -b_z \\ -c_x & -c_y & -c_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x'(b_y c_z - b_z c_y) - \vec{e}_y'(b_x c_z - b_z c_x) + \vec{e}_z'(b_x c_y - b_y c_x).$$

Что и требовалось доказать, то есть координаты псевдовектора $\vec{a}_1$ не изменились при инверсии системы координат.

Вектор $d\vec{\varphi} = d\varphi \cdot \vec{e}_z$ не изменяется при инверсии, так как инверсионная система является левовинтовой, следовательно, положительное направление $d\vec{\varphi}$ в этой системе определяется правилом левого винта.

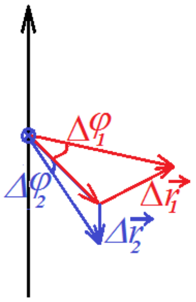
Псевдовекторами являются $\vec{\omega}, \vec{\beta}, \vec{M}$ (момент импульса), $\vec{N}$ (момент силы), $\vec{H}, \vec{B}$ (напряженность и индукция магнитного поля).

Псевдовекторы, как и истинные векторы, складываются по правилу параллелограмма. Но операция сложения имеет смысл, когда складываются <u>только</u> псевдовекторы или только истинные векторы. В отличие от сложения, перемножать истинные и псевдовекторы допустимо, векторные произведения истинных и псевдовекторов определены следующим образом:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \hat{\vec{c}};\ [\vec{a}, \hat{\vec{b}}] = \vec{c};\ [\hat{\vec{a}}, \hat{\vec{b}}] = \hat{\vec{c}}.$$

Знаком ^ обозначены псевдовекторы.

Псевдовекторы нужны, чтобы все формулы имели одинаковый вид в правых и левых координатных системах. Если пользоваться одними правыми или левыми системами координат, то отпадет необходимость разделения векторов на полярные и аксиальные.



Вернёмся к вращению твёрдого тела вокруг оси. Если углы поворота малы, то:

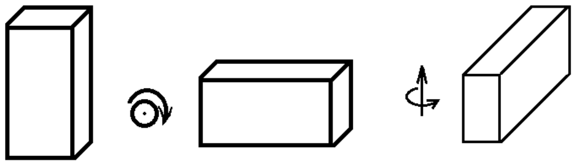
$$d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 = [d\vec{\varphi}_1, \vec{r}] + [d\vec{\varphi}_2, \vec{r}] = [d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2, \vec{r}].$$

То есть *дифференциалы углов поворота* $d\vec{\varphi} = d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2$ *складываются по правилу параллелограмма.*

$\int_1^2 d\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_2 - \vec{\varphi}_1$ не имеет смысла, так как *углы не есть векторы и не складываются по правилу параллелограмма.*

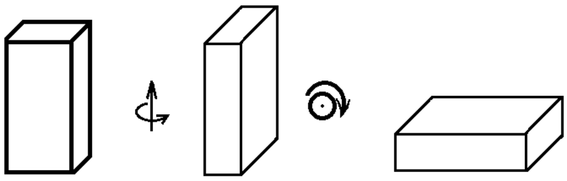
Пример.

а)



Две книги. Поворот вокруг двух взаимно перпендикулярных осей в разной последовательности даёт разные результаты.

б)



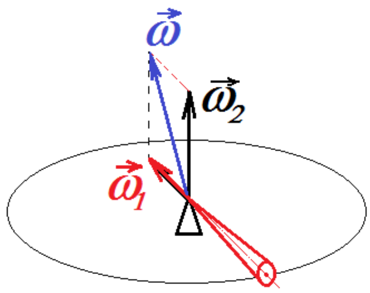
4. Угловая скорость

Опред. *Угловая скорость* $\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$; $[\omega] = \dfrac{1}{c}$.

Модуль угловой скорости определяет собой угол поворота в единицу времени, а направление совпадает с направлением мгновенной оси вращения.

$\vec{\omega}$ – псевдовектор.

$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ – *если тело участвует в двух вращениях.*



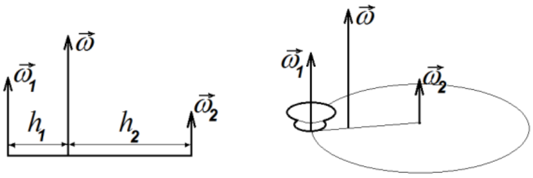
Пример: конус с закреплённой вершиной катится по столу.

$\vec{\omega}$ *определяет собой направление мгновенной оси вращения,* то есть телу “кажется”, что оно участвует только во вращательном движении вокруг этой оси.

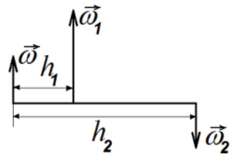
Вращение вокруг параллельных осей можно рассматривать как предельный случай вращения вокруг пересекающихся осей, но надо различать два случая:

- $\vec{\omega}_1 \uparrow\uparrow \vec{\omega}_2$;
- $\vec{\omega}_1 \uparrow\downarrow \vec{\omega}_2$.

В обоих случаях вопрос заключается в том, где проходит мгновенная ось вращения. Как показано на рисунке, расположение мгновенной оси вращения подчиняется следующему соотношению $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ при этом $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$.



$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$



$\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$

$\vec{\omega} - in\,\text{var}$, то есть ни направление, ни величина $|\vec{\omega}|$ не зависят от выбора системы координат. Это можно доказать строго математически, рассмотрев углы поворота любой точки тела в различных системах координат и показав, что эти углы поворота равны. Умозрительно это ясно, так как угол, на который повернётся тело, не зависит от местоположения точки наблюдения.

Вращение называется равномерным, если $\vec{\omega} = const$, *при этом время* $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ *– период обращения*. При этом $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$ *– частота вращения,* ω *– круговая частота.*

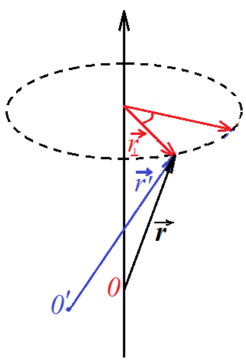
5. Угловое ускорение

<u>Опред.</u> *Угловое ускорение* $\vec{\beta} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ – псевдовектор.

$\vec{\beta}$ параллельно $\vec{\omega}$ при ускоренном вращении или антипараллельно $\vec{\omega}$ при замедленном вращении тела вокруг неподвижной оси.

При вращении вокруг неподвижной оси $\vec{\beta}$ *отвечает за изменение* $|\vec{\omega}|$ *и направление* $\vec{\beta}\uparrow\uparrow\vec{\omega}$ *или* $\vec{\beta}\uparrow\downarrow\vec{\omega}$. *В других случаях* $\vec{\beta}$ *может быть и не параллельно* $\vec{\omega}$.

6. Связь линейных и угловых величин



Приращение радиуса-вектора частицы при ее повороте вокруг неподвижной оси $d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}]$.

Точка O принадлежит оси вращения. Если это не так, то $d\vec{r} \neq [d\vec{\varphi}, \vec{r}']$, где $\vec{r}'$ – радиус-вектор относительно точки O', не принадлежащей оси вращения.

Линейная скорость точки $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \left[\dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}, \vec{r}\right] = [\vec{\omega}, \vec{r}] = [\vec{\omega}, \vec{r}_\perp] \Rightarrow \upsilon = \omega r_\perp$,

где $r_\perp$ – расстояние от оси вращения до данной точки.

Линейное ускорение $\quad \vec{w} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \dfrac{d}{dt}[\vec{\omega}, \vec{r}_\perp] = [\vec{\beta}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}_\perp]]$.

<u>Вопрос.</u> Что определяют собой слагаемые этой формулы?

<u>Ответ.</u> Если ось неподвижна, то $[\vec{\beta}, \vec{r}]$ даёт вектор, параллельный скорости данной точки, он “отвечает” за изменение величины скорости, то есть это тангенциальное ускорение $\vec{w}_\tau = [\vec{\beta}, \vec{r}] = \beta r_\perp \cdot \vec{\tau}$.

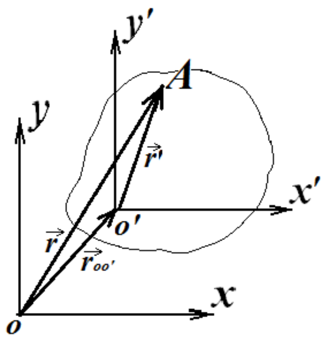
Тогда $\vec{w}_n = [\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{r}_\perp]] = \vec{\omega}(\vec{\omega},\vec{r}_\perp) - \vec{r}_\perp(\vec{\omega},\vec{\omega}) = -\vec{r}_\perp\omega^2 = r_\perp\omega^2\vec{n} = \dfrac{\upsilon^2}{r_\perp}\vec{n}$ – нормальное ускорение направлено против $\vec{r}_\perp$, то есть по $\vec{n}$, и “отвечает” за изменение направления скорости.

Полное ускорение – $\vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n = r_\perp\left(\beta\vec{\tau} + \omega^2\vec{n}\right)$, *модуль полного ускорения* – $w = \sqrt{\beta^2 + \omega^4}\cdot r_\perp$.

7. Плоское движение твёрдого тела

Плоское движение – движение, при котором любая точка твёрдого тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной в данной системе координат плоскости, при этом плоская фигура Φ*, образованная сечением тела этой плоскостью, в процессе движения всё время остаётся в этой плоскости.*

Плоское движение представляет собой суперпозицию поступательного и вращательного движения вокруг оси, которая не меняет своего направления. При плоском движении траектории всех точек тела плоские и лежат в параллельных плоскостях.



Пусть траектории всех точек тела параллельны плоскости (x, y). Найдём $\vec{\upsilon}_A$ – скорость произвольной точки A при плоском движении.

Введём систему K', которая жёстко связана с точкой O', принадлежащей телу.

Через точку O' мысленно проведём ось вращения. При этом поворот тела за время dt на угол $d\varphi$ не зависит от выбора точки O', так как $\vec{\omega} = in\text{var}$.

При переходе из одной системы координат в другую
$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_{OO'} \Rightarrow \begin{cases} d\vec{r} = d\vec{r}\,' + d\vec{r}_{OO'} \\ d\vec{r}\,' = \left[d\vec{\varphi}, \vec{r}\,'\right] \end{cases}.$$

Так как перемещение точки A относительно точки O' обусловлено вращением точки A относительно неподвижной в системе K' оси, проходящей через точку O', то
$$\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_{O'} + \left[\vec{\omega}, \vec{r}_{O'A}\right].$$

То есть *плоское движение твёрдого тела можно представить как совокупность двух основных видов движения: поступательного вместе с произвольной точкой* O' *тела и вращательного вокруг оси, проходящей через эту точку* O'.

Скорость любой точки A *твёрдого тела при плоском движении складывается из скорости* $\vec{\upsilon}_{O'}$ *произвольной точки* O' *и скорости* $\vec{\upsilon}\,'$ *точки* A*, равной* $\left[\vec{\omega}, \vec{r}_{O'A}\right]$ *и обусловленной вращением точки* A *относительно точки* O'.

8. Произвольное движение твёрдого тела

Вращением тела вокруг точки называют такое движение, при котором траектории всех точек тела лежат на концентрических сферических поверхностях.

Произвольное движение твёрдого тела можно произвольным же образом разбить на поступательные движения вместе с некоторой точкой, жёстко связанной с телом, и вращательные движения тела вокруг этой точки. При этом формула $\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_B + [\vec{\omega}; \vec{r}_{BA}]$, *полученная для плоского движения, справедлива и для произвольного движения.*

9. Мгновенная ось вращения

Воспользуемся результатом, полученным в предыдущем параграфе для скорости точки A $\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_{O*} + [\vec{\omega};\vec{r}_{O*A}]$.

Если $\vec{\upsilon}_{O*}(t_0) = 0$*, то точка O* называется мгновенным центром вращения (или мгновенным центром скоростей) в данный момент времени* t_0.

Для любой точки A в момент времени t_0 *справедливо*: $\vec{\upsilon}_A = [\vec{\omega};\vec{r}_{O*A}]$.

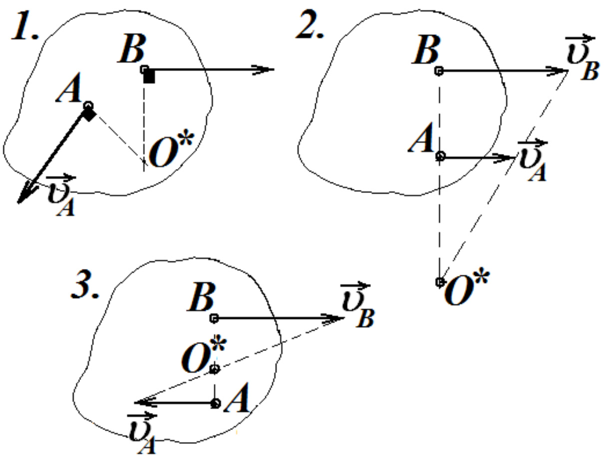
При плоском движении через мгновенный центр скоростей проходит мгновенная ось вращения, перпендикулярная плоскостям, в которых движутся все точки тела.

10. Качественные вопросы и задача о колесе

1. Найти положение мгновенной оси вращения твердого тела $O*$, если известны скорости двух его точек A и B.

Решение.

Для разных случаев взаимной ориентации векторов $\vec{\upsilon}_B$ и $\vec{\upsilon}_A$ решение представлено на рисунках 1 – 3.



2. Найти $\vec{\upsilon}_B$, зная $\vec{\upsilon}_A$ и $\vec{\omega}$, и затем найти построением мгновенный центр скоростей $O*$.

Решение.

1) $\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_A + [\vec{\omega};\vec{r}_{AB}]$.

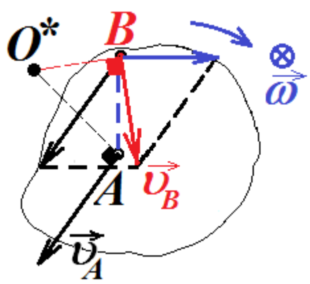
В точку B переносим вектор $\vec{\upsilon}_A$ – поступательное движение.

2) В точке B строим вектор скорости вращательного движения точки B относительно точки A: $\vec{\upsilon}_{Bвращ} = [\vec{\omega};\vec{r}_{AB}]$.

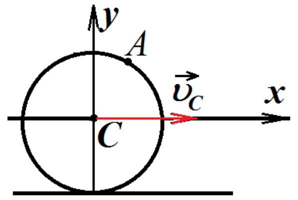
3) Складываем построенные векторы по правилу параллелограмма, получая $\vec{\upsilon}_B$.

4) В точке A проводим перпендикуляр к $\vec{\upsilon}_A$, а в точке B – перпендикуляр к $\vec{\upsilon}_B$, так как $\vec{\upsilon}_A = [\vec{\omega};\vec{r}_{O*A}]$, $\vec{\upsilon}_B = [\vec{\omega};\vec{r}_{O*B}]$.

5) Пересечение этих перпендикуляров даёт точку $O*$ – мгновенный центр скоростей.



3. Колесо катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости, при этом известна зависимость $\vec{\upsilon}_c(t)$ скорости центра колеса от времени. Найти скорость и ускорение произвольной точки колеса.

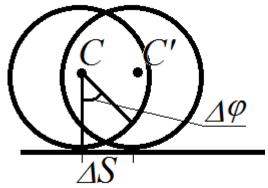


A

Решение.

В системе центра колеса, то есть движущейся с $\vec{\upsilon}_c(t)$, с началом координат в точке C любая точка на ободе вращается вокруг оси, проходящей через точку C.

В неподвижной системе $\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_C(t) + [\vec{\omega}; \vec{r}_{CA}]$, где $[\vec{\omega}; \vec{r}_{CA}]$ – скорость вращения точки A относительно точки C.



Покажем, что $\upsilon_C = \omega R$, где R – радиус колеса, υ_C, ω – соответственно мгновенная скорость точки C и угловая скорость вращения. Пусть за время dt точка C переместилась на $dS' = \upsilon_C dt$.

На рисунке мы не можем показать бесконечно малый путь dS, пройденный колесом, поэтому изображён малый участок пути ΔS. При этом $CC' = \Delta S$, так как колесо катится без проскальзывания, и $\Delta S = R\Delta\varphi$ для малых $\Delta\varphi$. Совершив предельный переход $\Delta t \to dt \to 0$, имеем

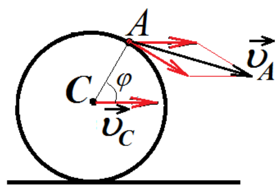
$$Rd\varphi = dS = \upsilon_C dt.$$

Разделив на dt, получим:

$$R\frac{d\varphi}{dt} = \upsilon_C = R\omega,$$ что и требовалось доказать.

В нашем случае $\vec{\omega}$ направлена перпендикулярно рисунку, “в лист” $\otimes$, и, следовательно, всегда перпендикулярна $\vec{r}_{CA}$, поэтому $\vec{\upsilon}_{A вращ} = \omega R\vec{\tau}$, $\vec{\tau} = -\vec{e}_\varphi$, так как вращение происходит по часовой стрелке. Тогда скорость точки A:

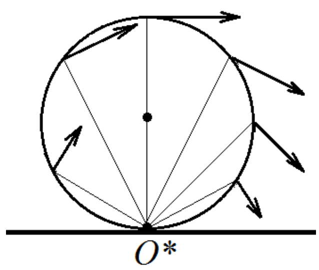
$$\vec{\upsilon}_A = \upsilon_C \vec{e}_x - \omega R\vec{e}_\varphi.$$



Выразим $\vec{e}_\varphi$ через неизменные орты $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$ нашей системы координат:

$$-\vec{e}_\varphi = \vec{e}_x \sin\varphi - \vec{e}_y \cos\varphi;$$

$$\vec{\upsilon}_A = \upsilon_C \vec{e}_x + (\vec{e}_x \sin\varphi - \vec{e}_y \cos\varphi)\upsilon_C = \upsilon_C[(1+\sin\varphi)\vec{e}_x - \cos\varphi \cdot \vec{e}_y].$$



Построим векторы скоростей различных точек обода. Заметим, что скорость в любой точке A_i перпендикулярна вектору $O^* A_i$, а именно $\vec{\upsilon}_{Ai}$ перпендикулярна $\vec{r}_{O^*A_i}$, так как точка O^*, касания колеса и поверхности является мгновенным центром скоростей.

Чтобы найти $\vec{w}_A$ – ускорение произвольной точки A, необходимо продифференцировать $\vec{\upsilon}_A$ по времени, учитывая то обстоятельство, что угол φ изменяется со временем и имеет отрицательную проекцию на ось z:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\omega.$$

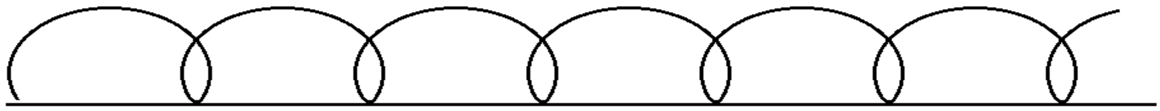
Напомним, что “–” указывает на вращение по часовой стрелке.

$$\vec{w}_A = \frac{d\upsilon_C}{dt}[(1+\sin\varphi)\vec{e}_x - \cos\varphi \cdot \vec{e}_y] + \upsilon_C[\cos\varphi(-\omega)\vec{e}_x + \sin\varphi(-\omega)\vec{e}_y] =$$

$$= \frac{d\upsilon_C}{dt}[(1+\sin\varphi)\vec{e}_x - \cos\varphi \cdot \vec{e}_y] + \frac{\upsilon_C^2}{R}(-\vec{e}_r).$$

Если $\frac{d\vec{\upsilon}_C}{dt} = 0$, то есть колесо катится равномерно, то $\vec{w} = -\frac{\upsilon_C^{\;2}}{R}\vec{e}_r$. Но при этом $\vec{w}$ не является $\vec{w}_n$, так как траекторией движения каждой точки является циклоида, а не окружность, как видно из рисунка, и полное ускорение $\vec{w}_A$, направленное к т. *C*, не перпендикулярно скорости $\vec{\upsilon}_A$ этой точки *A*, за исключением верхней точки колеса.

Если точка $A \in O(R)$, где *R* – радиус качения, то она описывает простую циклоиду.



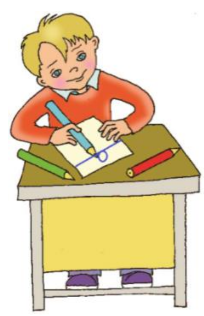
Если $r_A > R$, то каждая точка описывает удлиненную циклоиду.

Если $r_A < R$, то каждая точка описывает укороченную циклоиду.

Радиус кривизны $R_{кр}$ траектории произвольной точки *A* обода в процессе движения изменяется. Он зависит от мгновенного положения этой точки:

$$R_{кр} = \frac{\upsilon_A^3}{\left| \left[\vec{w}, \vec{\upsilon}_A \right] \right|}.$$

При равномерном качении колеса $R_{кр} = R \cdot 2\sqrt{2}\sqrt{1 + \sin\varphi} = 4R\left|\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})\right|$.



II. Динамика

II.1. Динамика материальной точки

1. Что такое динамика

1. *Динамика изучает движение тел во взаимосвязи с причинами, это движение вызывающими.*

Главные вопросы русской литературы и жизни: “Что делать?” и “Кто виноват?” Если кинематика занимается вопросом “Что (будет) делать (тело)?”, то динамика вначале задаётся вопросом “Кто виноват?”, формулируя динамические задачи движения, а уже потом задаётся вопросом “Что (будет) делать (тело)?”, решая динамические задачи нахождения из ускорения $\vec{w}$ скорости $\vec{\upsilon}(t)$, радиуса-вектора $\vec{r}(t)$ и траектории движения частицы.

2. *В основе* классической или ньютоновской динамики лежат 3 закона, сформулированные Ньютоном в 1687 г. в “Математических началах натуральной философии” на основе обобщения экспериментальных фактов.

3. *Ограничения ньютоновской механики.*

1) Ограничения, связанные с постановкой задачи, а именно, *с нахождением траектории.*

В 1927 г. *Гейзенберг* сформулировал *принцип неопределённости, в соответствии с которым невозможно одновременно абсолютно точно знать координату и импульс частицы в этом направлении*:

$$\Delta x \cdot p_x \geq 2\pi \cdot \hbar,$$

$$\Delta\vec{r} \cdot \Delta\vec{\upsilon} \geq \frac{2\pi \cdot \hbar}{m},$$ где $\hbar = 1{,}054 \cdot 10^{-34}$ *Дж · с* – постоянная Планка.

Если мы хотим знать местоположение электрона с $m_e \approx 10^{-30}$ *кг* с точностью до $1\ мкм = 10^{-6}\ м$, получаем неопределённость в скорости $\Delta\upsilon \approx 10^2\ м/с$.

Таким образом, классическая механика неприменима для объектов микромира, так как у них нет траектории, квантовая механика – это физика вероятностей, и основная её задача – нахождение наиболее вероятного местоположения элементарной частицы.

Обычный для классической механики диапазон масс объектов: $m \geq 1\ мг = 10^{-6}\ кг$.

2) В основе классической механики лежат преобразования Галилея, которые неприменимы для скоростей $\upsilon \approx c$ – скорости света.

Однако, не имея абсолютной общности, механика Ньютона не утратила своего значения для макромира, в котором мы существуем.

2. Инерциальные системы отсчёта

Для изучения механических явлений нужно выбрать ту или иную систему отсчёта. В разных системах отсчёта закон движения одного и того же тела принимает разный вид. Например, тело, брошенное под углом к горизонту, движется по параболе в неподвижной системе, но если за ним наблюдают из окна автомобиля, движущегося со скоростью $\upsilon_X = \upsilon_0 \cos\alpha$, то тело будет двигаться по прямой вверх-вниз. Если взять произвольную систему отсчёта, то может оказаться, что законы даже совсем простых явлений в ней выглядят весьма сложно. Поэтому возникает задача отыскания такой системы отсчёта, в которой законы механики выглядели бы наиболее просто.

Такими системами являются инерциальные системы отсчёта, в которых пространство однородно и изотропно, а время однородно. Вообще говоря, в произвольной системе отсчёта пространство и время могут быть неоднородны и пространство неизотропно.

Вопрос. Что это значит?

Однородность – одинаковость свойств в разных точках. Применительно:

а) ко времени это означает, что все моменты времени эквивалентны;

б) к пространству: одинаковость свойств пространства в разных его точках, т.е. если тело не взаимодействует с другими телами, то его различные положения в пространстве эквивалентны.

Изотропия пространства – одинаковость его свойств по различным направлениям, т.е. если тело не взаимодействует с другими телами, то его различные ориентации в пространстве эквивалентны.

Примеры.

1. Неизотропность или *анизотропия* пространства наблюдается в системе, которая движется с ускорением $\vec{a}$. Если вы сомневаетесь в её анизотропии, то вспомните, что в резко тормозящем автобусе гораздо приятнее сидеть, чем стоять. Ваше возможное падение – плата за “верность” неинерциальной системе, в данном случае системе отсчёта с анизотропным пространством, которой является тормозящий автобус.

2. Примером системы, обладающей неоднородностью пространства, является любая система, вращающаяся вокруг оси. В такой системе траектория тела, брошенного под углом к горизонту, даже в случае предельного симметричного бросания от оси к периферии будет иметь вид уплотняющейся спирали, шаг которой зависит от того, в какой момент времени (если система раскручивается) и из какой точки бросили тело.

Таким образом, в произвольной системе отсчёта ускорение тела связано с его взаимодействием с другими телами и свойствами самой системы.

Опред. *1. Система отсчёта, в которой свободное материальное тело (то есть не подверженное воздействию других тел) сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения относительно такой системы отсчёта, называется инерциальной. В инерциальных системах отсчёта пространство является однородным и изотропным, а время – однородным.*

2. Система отсчёта, по отношению к которой пространство является однородным и изотропным, а время – однородным, называется инерциальной. В ИСО ускорение тела определяется его взаимодействием с другими телами.

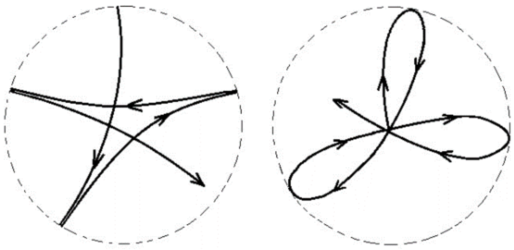
Фактически, в этих определениях заключается I закон Ньютона, поэтому его другое название – закон инерции Галилея – Ньютона, так как первым определение инерциальности системы отсчета дал Галилей.

Эксперименты показывают, что гелиоцентрическая система отсчёта инерциальна. То есть система отсчёта, у которой Солнце суть начало координат, а оси направлены на удалённые звёзды, является инерциальной в малой области пространства, соответствующей солнечной системе.

Экспериментальным доказательством такого утверждения является изотропия реликтового излучения относительно Солнечной системы, которая движется относительно фона реликтового излучения вместе с Галактикой в направлении созвездия Льва со скоростью $(390 \pm 6)\cdot 10\ \frac{км}{с}$. Спектр реликтового излучения соответствует спектру абсолютно чёрного тела с температурой $T = 2{,}7$ К при плотности фотонов $400\ \frac{1}{см^3}$, плотности энергии $0{,}25\ \frac{эВ}{см^3}$ и диапазоне длин волн $\lambda = 0{,}5\ мм\ \div\ 0{,}5\ м$.

Любая другая система отсчёта, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно гелиоцентрической системы, также является инерциальной. В таких системах пространство однородно и изотропно, а время однородно, и любая, даже заряженная, частица при отсутствии на неё воздействия других тел будет сохранять состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения.

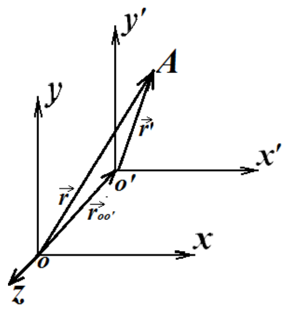
Земля является почти инерциальной системой отсчёта, так как движется вокруг Солнца по орбите большого радиуса $l = 1{,}5 \cdot 10^{11}\,м$, то есть почти прямолинейно с почти постоянной скоростью $\upsilon = (29{,}8 \pm 0{,}6)\dfrac{км}{с}$. Неинерциальность геоцентрической системы связана с вращением Земли вокруг собственной оси. Опыт Фуко доказал её неинерциальность, связанную с вращением. Выведенный из положения равновесия маятник Фуко описывает сложную траекторию.



3. Преобразования Галилея

Преобразования Галилея основаны на предположении об абсолютности расстояний и промежутков времени в различных инерциальных системах.

Время абсолютно, то есть течет одинаково во всех системах отсчёта. Вследствие очевидности Галилей считал это само собой разумеющимся.



Пусть при $t_0 = 0$ начало координат *K*-системы точка O совпадала с точкой O' – началом координат K'-системы, двигающейся со скоростью $\vec{V}$, тогда радиус-вектор произвольной точки *A* в *K*- и K'-системах будет связан следующим соотношением:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_{OO'} + \vec{r}\,' \\ \vec{r}_{OO'} = \vec{V}t \\ t = t' \end{cases} .$$

Если время в соответствии с предположением Галилея течёт одинаково в разных системах, то $t = t'$ и $\dfrac{dt'}{dt} = 1$. Тогда, дифференцируя соотношение для радиуса-вектора, получим соотношение для преобразования скорости произвольной частицы при переходе из *K*-системы в K'-систему:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}t' \\ t = t' \\ \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}\,' + \vec{V} \end{cases} \quad – \textit{ преобразования Галилея.}$$

Из преобразований Галилея следует: $\begin{cases} \Delta t^{(K)} = \Delta t^{(K')} \\ l^{(K)} = l^{(K')} \end{cases}$ – *абсолютность расстояний и промежутков времени в различных системах отсчёта.*

4. Принцип относительности Галилея

«Движенья нет», – сказал мудрец брадатый,
Другой смолчал и стал пред ним ходить.
Сильнее бы не смог он возразить.
Хвалили все ответ замысловатый.
Но, господа, забавный случай сей
Другой пример на память мне приводит:
Ведь каждый день пред нами солнце ходит,
Однако ж прав упрямый Галилей.

А.С. Пушкин

На протяжении веков вопрос об абсолютности и относительности движения активно дискутировался. Галилей внёс ясность, сделав заключение об эквивалентности инерциальных систем отсчёта и отсутствии абсолютного движения.

Принцип относительности Галилея.

Во всех инерциальных системах свойства пространства и времени одинаковы и одинаковы все законы механики.

Другая формулировка.

Все инерциальные системы эквивалентны друг другу по своим механическим свойствам, то есть никакими механическими опытами, проводимыми внутри системы, нельзя установить, покоится эта система или движется.

Галилей писал: «Уединитесь с каким-нибудь приятелем в просторном помещении под палубой корабля и пустите туда мух, бабочек и других мелких летающих насекомых. Пусть там находится также большой аквариум с рыбками. Заставьте теперь корабль привести в движение с какой-нибудь скоростью. Если это движение будет равномерным и без качки, то вы не обнаружите ни малейшего изменения во всех указанных явлениях (бросать с одинаковой скоростью предмет в различных направлениях, прыгать на двух ногах, движение рыбок, полёт бабочек) и ни по одному из них не сможете установить, движется ли корабль или стоит».

5. I закон Ньютона – закон инерции Галилея – Ньютона

Существуют системы отсчёта, называемые инерциальными, в которых свободная материальная точка, то есть не подверженная воздействию других тел, сохраняет состояние покоя или прямолинейного и равномерного движения.

Всякое свободное движение происходит с постоянной по величине и направлению скоростью.

6. Масса

Масса – мера инертности тел. Инертность – способность тел сопротивляться внешнему воздействию, то есть действию, производимому над телом, чтобы изменить его состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения.

Невозможно дать точное определение фундаментальным понятиям: масса, заряд, сила, в математике – определение прямой.

В релятивизме масса может быть определена точно как релятивистский инвариант:

$$m_0 = \frac{E_0}{c^2}.$$

Фактически это не масса, а энергия покоя, делённая на квадрат скорости света.

Мы пока будем довольствоваться определением инертной массы, данным в начале этого параграфа, и жизненным опытом: чем больше масса, тем труднее привести тело в движение, если оно покоилось, и остановить, если двигалось.

Масса – аддитивная величина, то есть $m=\sum_{i=1}^{N} m_i$ *, где* N *– количество частей системы,* m_i *– масса* i *-ой части.*

7. Импульс – количество движения

Ньютон определил количество движения следующим образом: «Количество движения есть мера такового, устанавливаемая пропорционально скорости тела $\vec{\upsilon}$ и его массе m».

<u>Опред.</u> $\vec{p}=m\vec{\upsilon}$ *– импульс материальной точки.*

Импульс – величина векторная и аддитивная.

Для системы материальных точек:

$$\vec{p}=\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_i=\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i .$$

8. II закон Ньютона

Что такое сила?

Формулировка Ньютона:

«Приложенная сила есть действие, производимое над телом, чтобы изменить его состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения».

<u>Вопрос.</u> В чём несовершенство этой формулировки?

<u>Ответ.</u> Как быть с силами, противодействующими движению, например с силой трения покоя, мешающей сдвинуть тяжёлый сундук?

Здесь та же проблема: сила – фундаментальное понятие и поэтому её невозможно точно определить.

<u>Второй (II) закон Ньютона.</u>

Изменение количества движения пропорционально равнодействующей приложенных сил и происходит в направлении её действия

$$\frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt}=\vec{F},\quad \vec{F}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i ,$$

где $\vec{F}$ *– равнодействующая всех сил,* а $\vec{F}_i$ *– реальные, то есть приложенные со стороны других тел, силы.*

II закон Ньютона верен только в инерциальных системах отсчёта.

<u>Замечание</u>. Слева стоит изменение импульса $\dfrac{d(m\vec{\upsilon})}{dt}$, а не произведение массы тела на ускорение $m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}=m\vec{w}$.

Так как $\dfrac{d(m\vec{\upsilon})}{dt}=m\vec{w}+\dfrac{dm}{dt}\vec{\upsilon}$, такая формулировка включает в себя:

- при $m=const \Rightarrow m\vec{w}=\vec{F}$ (это частный вид II закона Ньютона);
- принцип реактивного движения: $m\vec{w}=-\dfrac{dm}{dt}\vec{\upsilon}$ в отсутствии внешних сил.

При малых интервалах $\Delta t \Rightarrow \Delta\vec{p}\approx\vec{F}\Delta t$.

9. Взаимосвязь I и II законов Ньютона

При $\begin{cases} m = const \\ \vec{F} = 0 \end{cases}$ получаем из II закона Ньютона $\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = 0$ – это I закон Ньютона.

Таким образом, формально I закон является частным случаем II закона Ньютона.

Вопрос. Почему I закон сформулирован в отдельный закон?

Ответ. Тому есть несколько причин.

1. I закон содержит утверждение (и это составляет главное его содержание) о существовании инерциальных систем, сделанное Галилеем.

2. Неочевидность. Аристотель и вслед за ним средневековые схоласты считали силу причиной движения, и только Галилей и Ньютон догадались, что нескомпенсированная сила является причиной *неравномерности* движения.

Вопрос. Почему не сообразили до них?

Ответ. Вследствие сложности наблюдения равномерного движения, то есть закона инерции, в земных условиях.

10. Формулировка задачи о движении

$$\frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i(t, \vec{r}, \vec{\upsilon}) \text{ – динамическое уравнение.}$$

В инерциальных системах учитываются только реальные силы.

Если $m = const$, то движение материальной точки описывается следующей системой:

$$\begin{cases} \textit{динамическое уравнение}: \\ m\vec{w} = m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} - \textit{равнодействующая реальных сил} \\ \qquad + \\ \textit{начальные условия}: \\ \vec{r}(0) = \vec{r}_0 \\ \vec{\upsilon}(0) = \vec{\upsilon}_0. \end{cases}$$

Решение этой системы $\vec{r}(t)$ *единственно.*

Уравнение динамики является векторным и содержит в себе три уравнения для каждой координаты, поэтому для решения векторное уравнение надо проектировать на оси координат.

Замечание. Уравнение движения может быть сформулировано в естественных координатах:

$$\begin{cases} m\dfrac{d\upsilon}{dt} = F_\tau \\ \dfrac{m\upsilon^2}{R_{кр}} = F_n. \end{cases}$$

Обычно это бывает выгодно при рассмотрении вращательного движения частицы.

Попробуем получить $\vec{r}(t)$ для некоторых частных случаев.

1) Если $\vec{F} = \vec{F}(t)$, то есть равнодействующая является только функцией времени (равнодействующая – однородная, но нестационарная сила), то:

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} m d\vec{\upsilon} = \int_0^t \vec{F}(t_1) dt_1 ,$$

$$m(\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0) = \int_0^t \vec{F}(t_1) dt_1 ,$$

$$m\frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{\upsilon} = m\vec{\upsilon}_0 + \int_0^t \vec{F}(t_1) dt_1 ,$$

$$m\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = m\vec{\upsilon}_0 t + \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} \vec{F}(t_1) dt_1 ,$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{1}{m} \cdot \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} \vec{F}(t_1) dt_1 .$$

2) Если равнодействующая $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, то есть $\vec{F}$ зависит только от координат (местоположения частицы), то для решения динамического уравнения $m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}(\vec{r})$ необходимо его свести к двум переменным следующим образом:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\vec{\upsilon} = \vec{F}(\vec{r})\vec{\upsilon} \quad \Big| dt \;\Rightarrow\; m(\vec{\upsilon} d\vec{\upsilon}) = \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} \;\Rightarrow$$

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} \;\Rightarrow\; \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^{\,2}}{2} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}.$$

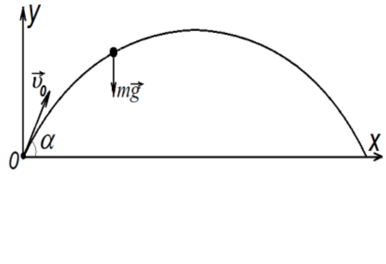
Отметим, забегая вперёд, что полученное выражение представляет собой связь приращения кинетической энергии частицы с работой всех сил, действующих на нее.

При этом модуль мгновенной скорости частицы имеет вид

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2}{m} \cdot \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} + \upsilon_0^2}.$$

3) Тело массой m брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью $\vec{\upsilon}_0$. В этом случае движение частицы описывается следующей системой:

$$\begin{cases} m\vec{w} = m\vec{g} \\ \vec{r}(0) = 0 \\ \vec{\upsilon}(0) = \vec{\upsilon}_0. \end{cases}$$



В соответствии с полученным в 1) общим решением:

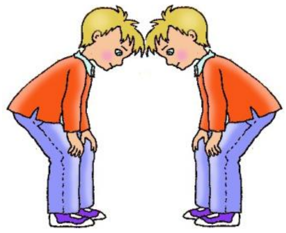
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{m\vec{g}}{m}\frac{t^2}{2} \underset{\vec{r}_0 = 0}{=} \vec{\upsilon}_0 t + \vec{g}\frac{t^2}{2} .$$

В проекциях на оси x и y уравнения динамики имеют вид:

$$\text{ось } x: \begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = \upsilon_0 \cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \dot{x} = \upsilon_0 \cos\alpha \\ x = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t \end{matrix};$$

$$\text{ось } y: \begin{cases} m\ddot{y} = -mg \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = \upsilon_0 \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \dot{y} = \upsilon_0 \sin\alpha - gt \\ y = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{matrix}$$

11. III закон Ньютона



Действию всегда есть равное и противоположно направленное противодействие

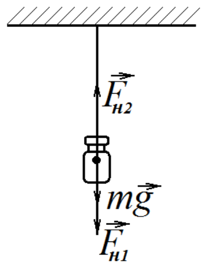
или

Воздействия двух тел друг на друга равны между собой и направлены в противоположные стороны вдоль одной прямой

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Здесь 1 – тело, на которое действует эта сила, а 2 – тело, которое воздействует на тело 1. Выполняется только для реальных сил.

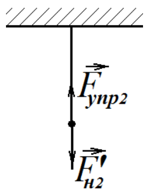
Пример.
Гиря на штативе с двумя нитками в состоянии покоя:



Уравнение динамики для гири:

$$0 = m\vec{g} + \vec{F}_{H1} + \vec{F}_{H2}.$$

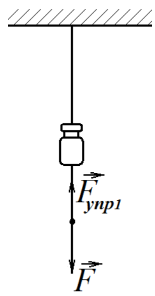
Уравнение динамики для верхней нити:



$$0 = \vec{F}'_{H2} + \vec{F}_{упр2}.$$

Уравнение динамики для нижней нити:

$$0 = \vec{F} + \vec{F}_{упр1}.$$



$$\left.\begin{matrix} \vec{F}_{H2} = -\vec{F}'_{H2} \\ \vec{F}_{H1} = -\vec{F}_{упр1} \end{matrix}\right\} \text{ по III закону Ньютона}$$

$$\Rightarrow 0 = \vec{F}'_{H2} + \vec{F} + \vec{F}_{упр1} + \vec{F}_{упр2} \underset{-\vec{F}_{H2}-\vec{F}_{H1}=m\vec{g}}{\Rightarrow} 0 = mg + F_{упр1} - F_{упр2} \Rightarrow F_{упр2} > F_{упр1}.$$

Следовательно, если тянуть статично, то оборвётся верхняя нить, а если дёрнуть резко, то нижняя, так как $\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$ и при $\Delta t \to 0$ $\Delta\vec{p}_{гири} = 0$ (в силу её инертности) и при $F > F_{упр1}$ нижняя нить оборвётся, а верхняя «не успеет» провзаимодействовать.

Замечание. *III закон Ньютона верен только для реальных сил* (то есть сил, приложенных со стороны других тел).

С точки зрения полевого взаимодействия III закон Ньютона может нарушаться.

Пример. Антенна излучила электромагнитную волну, на пути распространения которой находится электрон e. На e действует электромагнитная сила, а сам он на антенну не действует.

12. Виды взаимодействий

Взаимодействие может осуществляться при:
- непосредственном контакте;
- на расстоянии.

В соответствии с этим силы делятся на:
- близкодействующие (деформация, натяжение, давление, трение, упругость);
- дальнодействующие (гравитационные, электрические, магнитные).

Все близкодействующие силы имеют электромагнитную природу.

13. Скорость распространения взаимодействий

В ньютоновской механике считается, что взаимодействия происходят мгновенно (даже на расстоянии), так как время абсолютно в преобразованиях Галилея, следовательно, часы во всех системах синхронизированы, одновременность любого события в разных системах отсчета абсолютная. Логически возразить нечего.

Экспериментально обоснованная точка зрения современной физики: скорость передачи сигналов $\upsilon \le c$ и *взаимодействия не могут передаваться с* $\upsilon > c$ $\Rightarrow$ *мгновенных взаимодействий нет* $\Rightarrow$ классическая механика даёт верный результат, когда $\upsilon << c$ – скорость распространения взаимодействий.

Вопрос. Почему ограничение скорости взаимодействий определяется именно c?

Ответ. Так как все силы кроме гравитационной имеют электромагнитную природу, а c – скорость распространения электромагнитных волн в вакууме.

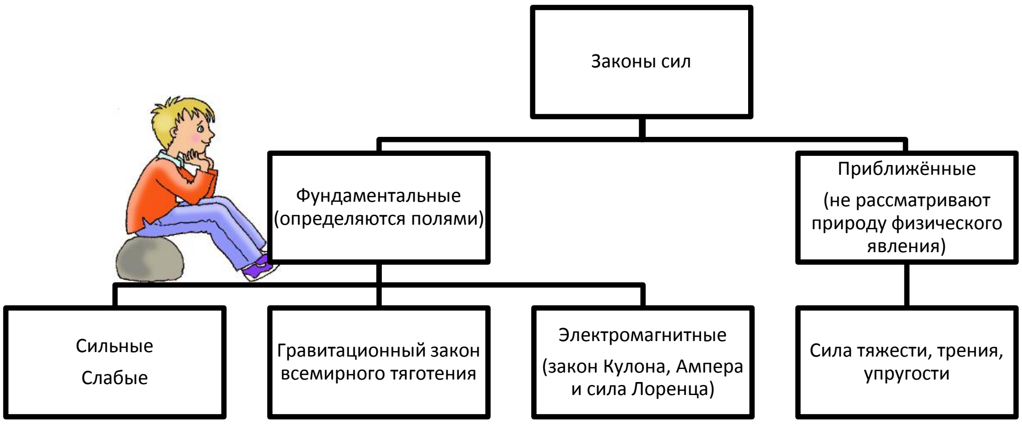
14. Классификация сил и современный взгляд на них

В XIX в. физики пытались свести все силы к механическим силам соприкосновения, вводя мировой эфир для передачи дальнодействия. Сейчас считают, что дальнодействие осуществляется посредством полей.

Поле – объективная реальность, посредством которой передаётся взаимодействие, поле может существовать и без тел, и без среды, то есть в вакууме.

Отличия поля от эфира:
- с полем нельзя связать систему координат;
- для поля не выполняется III закон Ньютона;
- понятия «упругость», «плотность», «покой», «движение» – не применимы к полю.

Замечание. Все силы макромира – молекулярные, упругие, трения, кроме гравитационных, имеют электромагнитную природу, а законы, описывающие силы трения, упругости, тяжести, представляют собой приближённые и эмпирические законы.



15. Фундаментальные силы (точные законы)

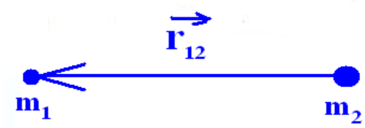
1. Гравитационная сила

Мы ввели массу как меру инертности тел, то есть способность сохранять своё первоначальное кинематическое состояние. Но тела обладают не только свойством инертности, но и способностью создавать вокруг себя гравитационное поле. При этом совсем не очевидно, что инертная масса m_{in} равна гравитационной массе m_g. Ньютон сделал такое предположение на основе опытов Галилея и своих собственных, изучая падение тел.

Экспериментально Л. Этвеш (1848 – 1919) установил равенство гравитационной и инертной масс с точностью до $5 \cdot 10^{-9}$. Р. Дикке в 1964 г. установил $\dfrac{m_g - m_{in}}{m_g} \le \dfrac{3 \cdot 10^{-11}}{10} \approx 10^{-12}$.

Закон всемирного тяготения:

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_{12}|^3} \vec{r}_{12}.$$



Гравитационная сила – центральная.

Вопрос. Что является центром?

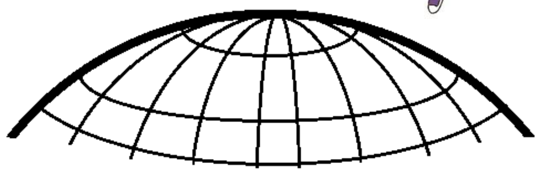
Ответ. В данном случае центром является точка 2.

Предположение Эйнштейна.

Нет физических опытов, которые позволили бы отличить однородное гравитационное поле от однородного поля сил инерции. ← Это краеугольный камень общей теории относительности (ОТО).

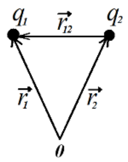
_Движение в лифте, удалённом от Земли и других небесных тел и движущемся с ускорением $\vec{g}$, будет таким же, как и в лифте, висящем в поле силы тяжести. $\Rightarrow$ Целесообразно объединить гравитационное поле и поле сил инерции в единое поле, назвав его гравитационным. Этим занимается ОТО $\equiv$ релятивистская теория гравитации. Она устанавливает уравнения гравитационного поля, которые содержат закон гравитации Ньютона как приближенный.

Приближённость закона всемирного тяготения Ньютона может быть связана только с представлениями о мгновенности взаимодействий. В рамках классической механики закон гравитации Ньютона – точный.



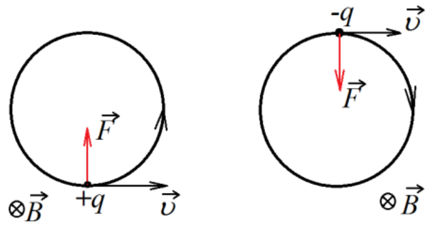
2. Закон Кулона – электрическая сила взаимодействия зарядов q_1 *и* q_2.

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\left|r_{12}^3\right|}\vec{r}_{12}$$ *– центральная сила.*



3. Магнитная сила – сила, действующая на заряд q, *движущийся со скоростью* υ *в магнитном поле* B, *– гироскопическая сила*:

$$\vec{F} = q\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right].$$



Общим для всех фундаментальных сил является взаимодействие через поле. В рамках классической механики это точные законы.

16. Приближенные силовые законы

1. Упругая сила.

Все реальные тела деформируемы (от *лат.* deformatio – искажение). Абсолютно недеформирующееся тело – абстракция.

Деформации делятся на:

- упругие;
- пластические.

Опред. *Упругими называются деформации, исчезающие после прекращения действия сил*, то есть тело после прекращения действия сил принимает первоначальные размеры и форму.

Пластические или остаточные деформации остаются в теле хотя бы частично после прекращения действия сил.

Если $F < F_0$, *где* F_0 *– предел упругости, то деформация упругая.*

Будем рассматривать только механику процесса упругой деформации, не вникая в физическую природу происходящего, так как этим занимается теоретическая физика твёрдого тела, рассматривая изменения межатомных расстояний, перегруппировку блоков атомов и молекулярные силы. Молекулярные силы – результат взаимодействия всех электронов и ядер одной молекулы со всеми электронами и ядрами другой.

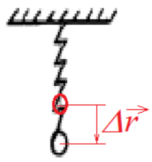
Виды деформаций:

- *растяжение-сжатие;*
- *изгиб;*
- *сдвиг;*
- *кручение.*

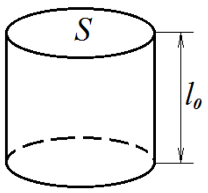
Всё можно свести к растяжению-сжатию и сдвигу.

а) Для упругой деформации справедлив *закон Гука:*

$\vec{F} = -k\Delta\vec{r}$, *где* $\Delta\vec{r}$ *– перемещение относительно недеформированного состояния.*



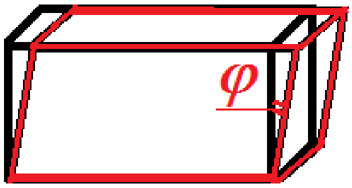
б) Аналогично для стержней:



$F=-k\Delta l$, где $k=\dfrac{ES}{l_0}$, E – модуль Юнга.

$\dfrac{F}{S}=\sigma$ – напряжение, $\dfrac{\Delta l}{l_0}=\varepsilon$ – деформация $\Rightarrow$ $\sigma=E\varepsilon$.

в) Аналогично для сдвига:

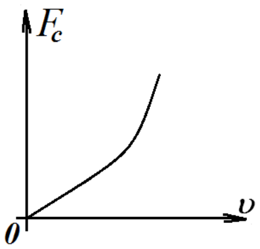


$F=GStg\varphi$, где G – модуль сдвига.

2. Силы трения.

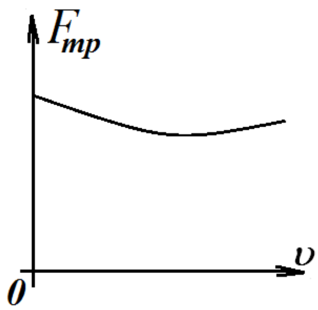
В зависимости от агрегатного состояния взаимодействующих веществ трение делится на:

- *внутреннее ≡ вязкое (между твёрдым телом и жидкостью или газом);*
- *внешнее ≡ сухое (при перемещении или соприкосновении твёрдых тел друг с другом).*



а) Вязкое трение – сила сопротивления:

$\vec{F}=-k\vec{\upsilon}$; при больших скоростях ($\uparrow\upsilon$) $\vec{F}=-k\upsilon^2\vec{\tau}$.



б) Сухое трение в зависимости от характера движения тела делится на следующие силы трения:

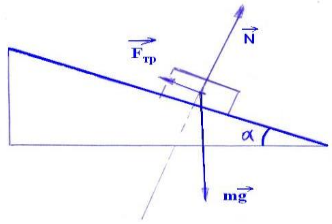
- *покоя;*
- *скольжения;*
- *качения.*

Для скольжения $F_{тр\ скольж}=kN$ *всегда направлена против относительного перемещения трущихся поверхностей по касательной к ним.*

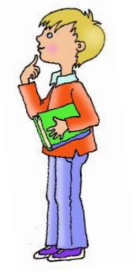
При этом $F_{кач}\le F_{скольж}$.

Примеры.

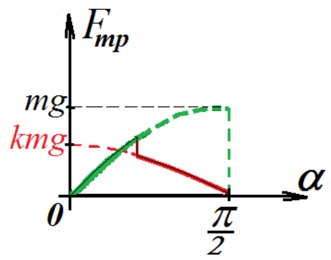
1) Соскальзывание бруска с наклонной плоскости.



а) Так как угол наклона, при котором брусок движется с $\vec{\upsilon}=const$, не зависит от веса бруска, то, следовательно, $F_{тр}$ прямо пропорциональна силе тяжести.



б) Так как при $\uparrow\alpha$ от нуля существует область покоя, а затем ускоренного движения $\Rightarrow$ $F_{тр\ покоя} > F_{тр\ скольж}$.



В состоянии покоя $mg\sin\alpha = F_{тр}$.

В движении $mw = mg\sin\alpha - kmg\cos\alpha$.

Если $w=0 \Rightarrow k = tg\alpha_0 \to \alpha_0 = arctg(k)$, *где* α *– угол, при котором тело начинает двигаться.*

k *зависит от состояния трущихся поверхностей.*

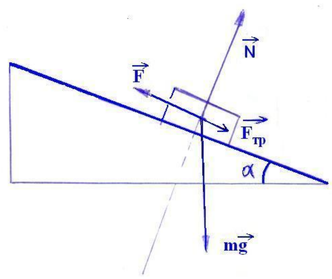
2) Тело втаскивают на наклонную плоскость с $\upsilon = const$.

$F_{тр} - ?$

$0 = F_{тр} + mg\sin\alpha - F$;

$\vec{F}_{тр} = mgk\cos\alpha\cdot\vec{e}_x$;

$F = mg(k\cos\alpha + \sin\alpha)$.

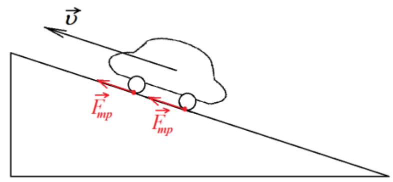


3) Автомобиль M едет в гору с $\upsilon = const$.

Вопрос. Что является движущей силой? Найти $F_{тр}$.

Ответ. $\vec{F}_{тр} = -Mg\sin\alpha\cdot\vec{e}_x$ – движущая сила.

Двигатель раскручивает колеса, а сила трения стремится помешать колесам вращаться, то есть действует вперёд.

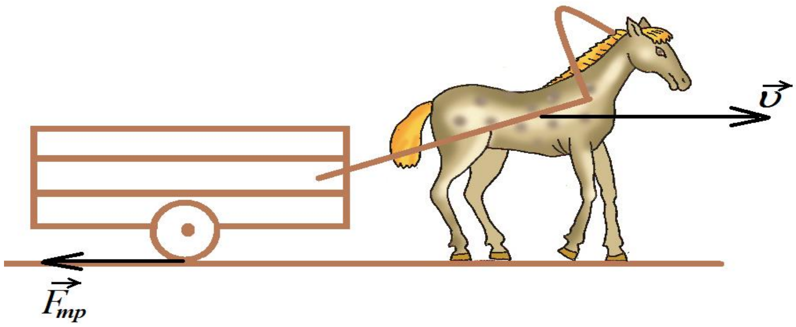


4) Лошадь и телега.

Вопрос. Куда направлена $\vec{F}_{тр}$? Что является движущей силой?

Ответ. $\vec{F}_{упруг} = \vec{F}_{тяги}$.

В данном случае $\vec{F}_{тр}$ раскручивает колёса и направлена против направления движения тележки.



Вывод. *Сила трения определяется характером процесса.*

Микроскопический механизм трения скольжения: неровности поверхности при скольжения сминаются, возникают колебания атомов и тепло растекается по обоим телам. Удивительно, что эту силу можно так легко описать.

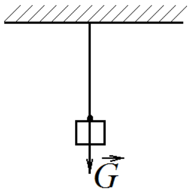
3. Сила тяжести.

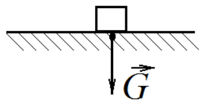
$\vec{F}_{тяж} = -\gamma \dfrac{mM_з}{(R_з + h)^2} \cdot \vec{e}_R \approx -\dfrac{\gamma M_з}{R_з^2} m\vec{e}_R = m\vec{g}$ – это сила притяжения к Земле.

Сила тяжести всегда приложена к самому телу!

$\vec{g} = -\dfrac{\gamma M_з}{R_з^2}\vec{e}_R$ – ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли.

Опред. *Сила, с которой тело действует на подвес или опору, неподвижную относительно тела, называется весом тела $\vec{G}$. $\vec{G}$ всегда приложен к опоре или подвесу.*

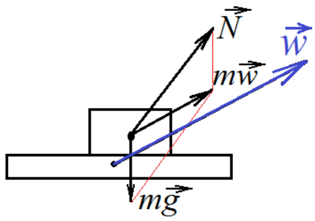




Сила, с которой действует опора на тело, называется силой реакции опоры $\vec{N}$.

По III закону Ньютона $\vec{N} = -\vec{G}$.

Запишем II закон Ньютона для тела, лежащего на движущейся с ускорением $\vec{w}$ пластине:



$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{N}$,

$\vec{N} = m(\vec{w} - \vec{g})$,

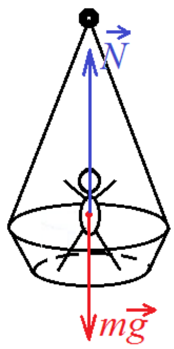
$\vec{G} = -\vec{N} = m(\vec{g} - \vec{w})$ приложена к опоре.

$G = \sqrt{(g - w_y)^2 + w_x^2} \cdot m$ – величина веса тела.

Если $\vec{w} = 0$, то $m\vec{g} = \vec{G}$, то есть для тел, движущихся без ускорения, вес и сила тяжести одинаковы, но приложены к разным объектам.

Примеры.

1. Уравнение динамики человека на качелях в нижней точке имеет следующий вид:



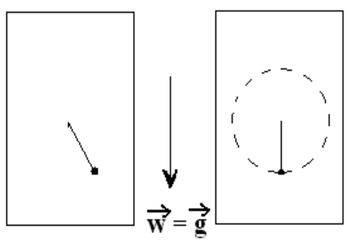
$\dfrac{m\upsilon^2}{R} = N - mg \Rightarrow N = m \cdot \left(\dfrac{\upsilon^2}{R} + g\right) > mg \Rightarrow$ человека подкидывает вверх.

2. Невесомость при свободном падении.

▪ При свободном падении пружины с оттягивающим грузом пружина возвращается к недеформированному состоянию.

▪ Падение математического маятника.

Поведение маятника зависит от его положения в момент обрыва троса лифта.



а) Пусть лифт начал падать, когда качающийся в нём маятник находился в крайнем положении и, следовательно, имел в этот момент скорость υ=0. В этом случае уравнение динамики для маятника в неподвижной системе отсчёта имеет вид: $\begin{cases} m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{F}_H - \textit{сила натяжения} \\ \vec{w} = \vec{g} \end{cases} \Rightarrow \vec{N} = 0 \Rightarrow$ невесомость $\Rightarrow$ при падении лифта маятник покоится в отклоненном положении.

б) Если лифт начал падать в тот момент, когда качающийся маятник проходил положение равновесия, то есть имел скорость υ и нормальное ускорение $\frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}$. Теперь уравнение динамики для маятника в неподвижной системе отсчёта будет иметь вид:

$$\begin{cases} m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{F}_H \\ \vec{w} = \vec{g} + \dfrac{\upsilon^2}{R}\vec{n} \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_H = \frac{m\upsilon^2}{R}\vec{n} \Rightarrow \text{ маятник будет крутиться.}$$

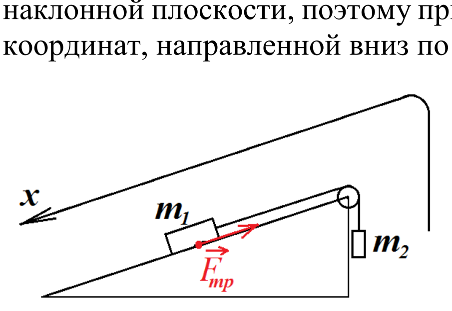
17. Пример решения динамической задачи

Невесомая нерастяжимая нить перекинута через неподвижный блок, по которому может скользить без трения. Массы m_1 и m_2 приходят в движение после того, как m_1 отпускают. k – коэффициент трения между m_2 и плоскостью. α – угол, который образует наклонная плоскость с горизонтом. Найти ускорение $\vec{w}$ системы.

1. Решение этой или подобной ей задачи, содержащей тела на наклонной плоскости в совокупности с висящим грузом, всегда необходимо начинать с выяснения вопроса: «КАК ДВИГАЛАСЬ БЫ СИСТЕМА В ОТСУТСТВИЕ СИЛ ТРЕНИЯ?» Выяснение этого вопроса имеет первостепенное значение, так как без ответа на него неизвестно, в каком направлении реально действует на тело 2 сила трения, а значит, при любом выборе системы координат проектирование уравнения динамики тела 2 на выбранные оси будет неоднозначно.

Сила, стремящаяся придать телу m_1 ускорение, направленное вверх по наклонной плоскости, равна $m_2 g$ (если нить скользит по блоку без трения), а вниз по наклонной плоскости действует сила $m_1 g \cdot \sin\alpha$. Сравнение этих сил даёт направление движения тела m_2, а значит, и всей системы.

а) Если $m_1 g \cdot \sin\alpha > m_2 g$ => $m_1 \cdot \sin\alpha > m_2$, то в отсутствие силы трения m_1 поедет вниз по наклонной плоскости, поэтому при дальнейшем решении задачи следует выбирать ось *x* системы координат, направленной вниз по наклонной плоскости.



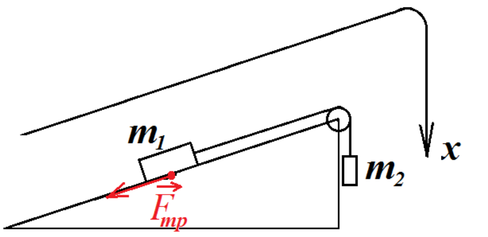
Тогда сила трения, действующая в этом случае вверх по наклонной плоскости, имеет отрицательную проекцию на ось *x*, а ускорение должно получиться *w* > 0 . Если подстановка численных данных в результирующую формулу ускорения даст *w* <0, это будет означать, что сила трения не даст телам сдвинуться с места и ускорение *w=0*.

б) Если $m_1 g \cdot \sin\alpha < m_2 g$ => $m_1 \cdot \sin\alpha < m_2$, то в отсутствие силы трения m_1 поедет вверх по наклонной плоскости, поэтому при дальнейшем решении задачи следует выбирать ось *x*, направленную вверх по наклонной плоскости. В этом случае сила трения действует вниз по наклонной плоскости и будет иметь, как и в случае а), отрицательную проекцию на ось *x*, а ускорение должно получиться *w* > 0.

Если подстановка численных данных в результирующую формулу ускорения даст *w* <0, это будет означать, что сила трения не позволит телам сдвинуться с места и ускорение *w=0*.

2. Пусть в данном случае $m_1 \cdot \sin\alpha < m_2$, запишем уравнения динамики для каждого тела:

$$\begin{cases} m_2\vec{w}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2; \\ m_1\vec{w}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{тр}; \\ 0\cdot\vec{w}_н = \vec{T}'_1 + \vec{T}'_2 + \vec{N}' \quad (0\cdot\vec{w}_н \text{ – нить невесомая, } \vec{N}' \text{ – сила реакции со стороны блока,} \\ \quad \text{сила трения нити о блок равна нулю, и сила упругости нерастяжимой нити равна нулю);} \\ \vec{T}_1 = -\vec{T}'_1 \quad \text{(по III закону Ньютона);} \\ \vec{T}_2 = -\vec{T}'_2; \\ w_н = w_1 = w_2 = w \quad \text{(так как нить нерастяжима);} \\ F_{тр} \le k\cdot N_1. \end{cases}$$



В проекциях на оси:

$$\text{ось } x: \begin{cases} m_1 w = T_1 - m_1 g\cdot\sin\alpha - F_{тр}; \quad (1) \\ m_2 w = -T_2 + m_2 g; \quad (2) \\ 0 = -T_1' + T_2' \Rightarrow T_1 - T_2 = 0 \Rightarrow T_1 = T_2. \end{cases}$$

$$\text{ось } y: \quad 0 = -m_1 g\cdot\cos\alpha + N \Rightarrow N = m_1 g\cdot\cos\alpha \Rightarrow F_{тр\max} = k\cdot m_1 g\cdot\cos\alpha.$$

Подставим максимальное значение силы трения $F_{тр\max} = k\cdot m_1 g\cdot\cos\alpha$ в уравнение (1). Оно реализуется при скольжении тела. Сложив уравнения (1) и (2), получим ускорение системы:

$$w = g\,\frac{m_2 - m_1(\sin\alpha + k\cdot\cos\alpha)}{m_1 + m_2}.$$

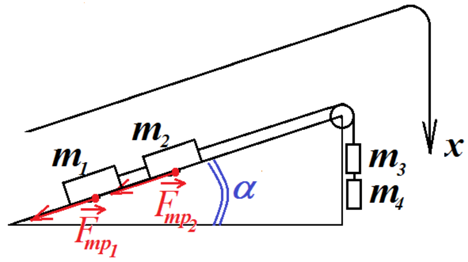
3. В полученном выражении для ускорения w явно просматривается физический смысл происходящего: числитель содержит силы, действующие по оси x на систему тел, причём разгоняющая сила, в данном случае $m_2 g$, имеет знак «+», а тормозящие силы, в данном случае проекция на наклонную плоскость силы тяжести первого тела $m_1 g\cdot\sin\alpha$ и сила трения $k\cdot m_1 g\cdot\cos\alpha$, имеют знак «–». В знаменателе стоит вся масса движущейся системы $m_1 + m_2$:

$$w = \frac{\textit{ускоряющ. силы} - \textit{тормозящие силы}}{\sum \textit{масс, участвующ. в поступат. движ.}}.$$

4. Приведённое рассуждение относительно ускорения системы правомерно для всех подобных задач. В частности, если в решенной нами задаче $m_1 \cdot \sin\alpha > m_2$, то ось x направляем вниз по наклонной плоскости и имеем ускорение

$$\vec{w} = \vec{e}_x \cdot g \frac{m_1 \sin\alpha - m_2 - k \cdot m_1 \cos\alpha}{m_1 + m_2}.$$

5. Для произвольной системы тел на наклонной плоскости, если $(m_1 + m_2) \cdot \sin\alpha < m_3 + m_4$:



$$\vec{w} = \vec{e}_x \cdot g \frac{m_3 + m_4 - (m_1 + m_2) \cdot (\sin\alpha + k \cdot \cos\alpha)}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \geq 0.$$

Однако следует помнить, что решение любой задачи должно начинаться с грамотной её постановки. В данном случае с формулировки II закона Ньютона в векторной форме для всех тел системы или для системы в целом, а затем их проекции на выбранные оси координат. После этого, если вы уверены в правильности своего физического понимания задачи, вы можете, опустив алгебраические преобразования, написать выражение для ускорения $\vec{w}$.

II.2. Законы сохранения

1. Силы внутренние и внешние. Замкнутая система. Закон сохранения импульса

Опред. *Силы взаимодействия частей системы между собой называются внутренними (силы взаимодействия материальных точек системы между собой*).

Опред. *Силы взаимодействия системы с материальными точками или телами, ей не принадлежащими, называются внешними* (силы, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела).

Опред. *Система, не подверженная действию внешних сил, называется замкнутой.*

По III закону Ньютона сумма всех внутренних сил системы =0, или равнодействующая всех сил в замкнутой системе =0.

Суммарный импульс системы $\vec{p} = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{p}_i$ *– аддитивная величина.*

Для произвольной отдельной частицы:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{\substack{i=1 \\ k\neq i}}^{N} \vec{f}_{ik} + \sum_{k=1}^{l} \vec{F}_{ik}$$, где $\vec{f}_{ik}$ – внутренние силы, $\vec{F}_{ik}$ – внешние силы.

Для системы частиц $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{d\vec{p}_i}{dt}$.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\Big(\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} \vec{f}_{ik} + \sum_{k=1}^{l} \vec{F}_{ik}\Big) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} \vec{f}_{ik} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{l} \vec{F}_{ik} = \vec{F}_{внешн.}$$

Если в каком-либо направлении действие на систему внешних сил скомпенсировано, то данная компонента импульса системы сохраняется:

$p_x = const$ при $\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{k=1}^{l} \vec{F}_{ik_x} = 0.$

Закон сохранения импульса является следствием однородности пространства в инерциальной системе отсчёта.

2. Работа. Мощность. Кинетическая энергия

Воспользуемся II законом Ньютона $m\vec{w} = m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}$, чтобы определить работу равнодействующей всех сил, действующих на частицу массой m.

Пусть частица под действием равнодействующей силы $\vec{F}$ *совершает перемещение на* $d\vec{r}$, *тогда элементарная работа силы* $\vec{F}$ *по перемещению* $d\vec{r}$ *частицы определяется как*

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos(\vec{F} \wedge d\vec{r}),$$

где $(\vec{F} \wedge d\vec{r})$ *– угол между силой и перемещением.*

$A_{12} = \int\limits_{1}^{2} \vec{F}d\vec{r} = \int\limits_{1}^{2} \delta A$ *– контурный интеграл.*

Вообще говоря, этот интеграл можно взять, если задан явный вид $\vec{F}(\vec{r})$.

Если $\vec{F}$ – равнодействующая всех сил, то:

$$\left.\begin{aligned} m\vec{w}\cdot d\vec{r} &= \vec{F}\cdot d\vec{r} \\ \vec{w}\,d\vec{r} &= \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}d\vec{r} = d\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_1^2 m\cdot d\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon} = m\,\frac{\upsilon^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{m\upsilon_2^{\,2}}{2} - \frac{m\upsilon_1^{\,2}}{2}.$$

<u>Опред.</u> $T = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$ – *кинетическая энергия частицы* m.

Работа результирующей всех сил, производимая над частицей, идёт на приращение её кинетической энергии.

<u>Замечание.</u> Приращение – это разница того, что стало, и того, что было, она может быть и отрицательной. Например, тело остановилось в результате действия силы трения $T_2 - T_1 = \Delta T < 0$. Значит, работа $\vec{F}_{тр}$ отрицательна.

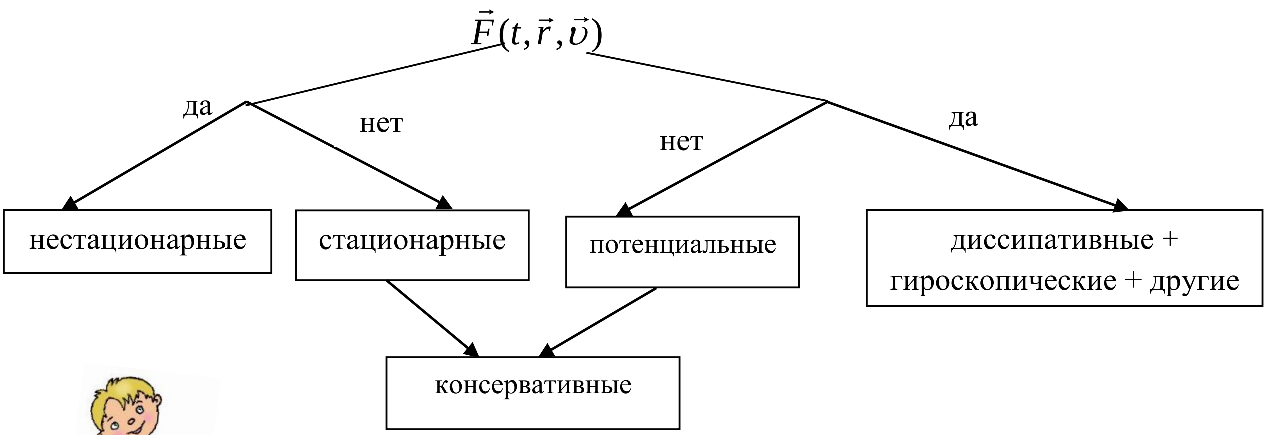
<u>Опред.</u> *Мощность силы* $\vec{F}$ *определяется как* $P = \dfrac{dA}{dt} = \vec{F}\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{\upsilon}$, *где* $\vec{\upsilon}$ *– скорость точки приложения силы.*

Мощность – работа, совершаемая в единицу времени.

$[A]$ = *Н·м* = *Дж*;   [P] = *Дж/с* = *Вт*.

3. Основные виды силовых полей

Вообще говоря, силы могут зависеть от времени t, местоположения $\vec{r}$ и скорости $\vec{\upsilon}$ частицы. Исходя из того, зависит ли данная сила от времени и скорости, ее относят к одной из следующих групп, на которые принято разделять все силы.



<u>Вопрос.</u> К каким силам относится сила трения?
<u>Ответ.</u> Сила трения – диссипативная сила.
<u>Вопрос.</u> Зависит ли она от скорости?
<u>Ответ.</u> Да, сила трения зависит от направления скорости.

4. Потенциальные поля

Опред. *Если существует функция* $\prod(t,x,y,z)$ *такая, что в любой точке* $\vec{F} = -\nabla\prod$, *то поле потенциальное.*

∇ = *grad* = оператор Набла = оператор Гамильтона.

Любой оператор подразумевает определённый набор последовательных действий, которые надо произвести над функцией. В случае оператора grad действия таковы:

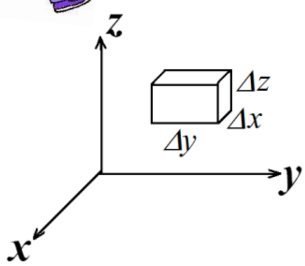
$$\nabla = \begin{cases} \vec{e}_x \dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \dfrac{\partial}{\partial z} & \text{в декартовой системе;} \\ \vec{e}_r \dfrac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \dfrac{\partial}{\partial \varphi}\dfrac{1}{r} + \vec{e}_z \dfrac{\partial}{\partial z} & \text{в цилиндрической системе;} \\ \vec{e}_r \dfrac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \dfrac{\partial}{\partial \varphi}\dfrac{1}{r\sin\theta} + \dfrac{1}{r}\vec{e}_\theta \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \text{в сферической системе.} \end{cases}$$

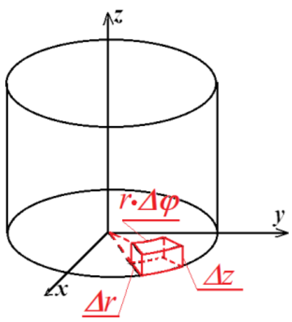
Вопрос. Откуда это берётся?

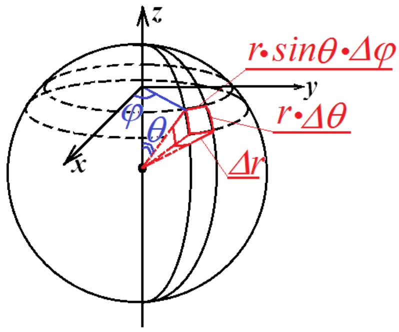
Ответ. Из представления элементарного объёма в разных координатных системах.

grad определяет собой вектор на скалярной функции.

Геометрический смысл *grad* – направление и величина максимального роста функции в данной точке.



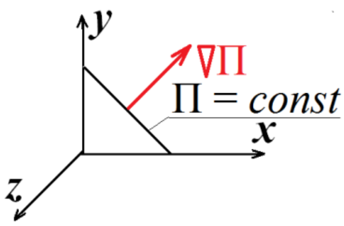




Примеры.

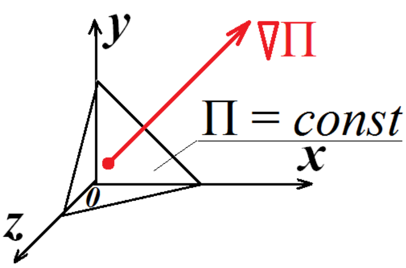
1) $\prod = x + y$; $\nabla\prod = \vec{e}_x + \vec{e}_y$.

Поверхности, на которых $\prod$ = *const, называются поверхностями постоянного уровня или эквипотенциальными.*



На поверхности постоянного уровня $\nabla\prod \equiv$ *вектор, перпендикулярный этой поверхности в каждой её точке и направленный в сторону максимального роста* $\prod$.

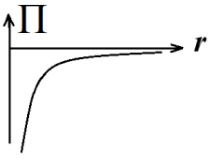
2) $\prod = x + y + z \Rightarrow \nabla\prod = \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z$.

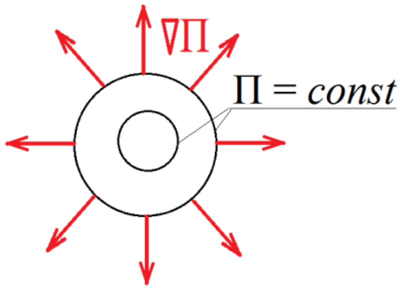


3) $\Pi = -\dfrac{\alpha}{r} \Rightarrow$ поверхности постоянного уровня – сферы.

$\nabla\Pi$ направлен по $\vec{e}_r$.

$$\nabla\Pi = r\frac{\alpha}{r^3}\vec{e}_r = \frac{\alpha\vec{e}_r}{r^2}.$$





5. Консервативные поля

Опред. *Поле, являющееся стационарным и потенциальным, называется консервативным*
стационарн. + потенц. = консервативн.

Любое консервативное поле имеет две характеристики:

СИЛОВАЯ	ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ
показывает, какая сила действует на единичный объект в данной точке пространства	показывает, какой энергией обладает единичный объект в данной точке пространства или какую работу надо совершить силам поля, чтобы удалить единичный объект из данной точки пространства на ∞ (если поле определено на бесконечности и равно 0)

Коль скоро консервативное поле имеет силовую характеристику, то любая частица в таком поле имеет энергию, определяемую ее взаимодействием с полем, которая называется *потенциальной энергией* $\vec{F} = -\nabla U$ (сила, действующая на частицу со стороны поля).

Сила направлена в сторону быстрейшего убывания потенциальной энергии.

Убедимся в том, что U – действительно работа сил поля по удалению частицы из данной точки на ∞.

$$A = \int_{\vec{r}_0}^{\infty}\vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = \int_{\vec{r}_0}^{\infty}-\nabla U(\vec{r}\ \ )d\vec{r} =$$

$$= -\int_{x_0y_0z_0}^{\infty}\left[\frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z\right]\cdot\left[dx\cdot\vec{e}_x + dy\cdot\vec{e}_y + dz\cdot\vec{e}_z\right] =$$

$$= -\int_{x_0y_0z_0}^{\infty}\left[\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right] = -U\ \Big|_{x_0y_0z_0}^{\infty} =$$

$$= -\{U(\infty) - U(x_0y_0z_0)\} = U(x_0y_0z_0),\ \ т.\ к.\ \ U(\infty) = 0.$$

Значит, *работа консервативной силы равна убыли потенциальной энергии* $A_{12} = -[U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1)]$.

Итак, мы установили, что:

1. *Работа консервативной силы по перемещению частицы из точки 1 в точку равна убыли её потенциальной энергии* $A_{12} = U_1 - U_2$.

2. В консервативном поле сил работа, совершаемая над частицей силами поля, зависит *только* *от начального и конечного положений частицы и не зависит от формы пути.*

3. Работа консервативной силы по замкнутому пути =0.

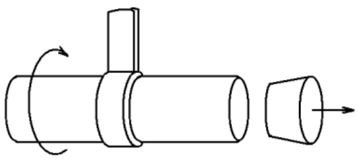
4. Если U определена на бесконечности ∞ *и* $U(\infty) = 0$*, то потенциальная энергия частицы в консервативном поле равна работе сил поля по удалению частицы из данной точки на* ∞ *или работе внешней силы, которую надо совершить для перемещения частицы из* ∞ *в данную точку пространства.*

6. Полная механическая энергия частицы

Опред. *Полная механическая энергия частицы* $E = T + U$.

Пример.

Пробирка с парами спирта приводится во вращение и затем тормозится при обжимании её войлочными обкладками, что приводит к «выстреливанию» пробки.



Физика процесса такова: сила трения совершает работу, изменяя кинетическую энергию вращения пробирки и превращая её во внутреннюю энергию паров спирта, заполняющих пробирку, что сопровождается повышением давления в пробирке, и пробка выстреливает. То есть внутренняя энергия паров переходит в кинетическую энергию пробки.

Итак, наблюдаем переход:

кинетическая энергия $\rightarrow$ внутренняя энергия $\rightarrow$ кинетическая энергия.

Энергия никогда не создаётся и не уничтожается, она просто переходит в другие виды. Деление энергии на кинетическую и потенциальную имеет смысл только в механике: упругая энергия сжатия газа в механике потенциальная, хотя определяется кинетической энергией движущихся молекул.

В отсутствие неконсервативных сил: $A_{12}^{конс.} = T_2 - T_1 = U_1 - U_2 \Rightarrow$
$T_1 + U_1 = T_2 + U_2$.

Следовательно, *в консервативном поле сил полная механическая энергия частицы сохраняется.*

Это очень удобное свойство, поэтому необходимо научиться определять, какие поля являются консервативными.

7. Способы определения консервативности поля

Вообще говоря, в связи со свойствами консервативных полей, которые мы сформулировали, можно определить консервативность поля по-разному.

Определения конс. поля

1. Стационарное поле, не зависящее от скорости, в котором работа сил поля над частицей не зависит от формы пути.

2. Стационарное поле, не зависящее от скорости, работа сил которого по любому замкнутому контуру =0.

3. Если работа сил поля может быть представлена в виде убыли некоторой функции, зависящей только от координат.

4. Стационарное + потенциальное = консервативное.

Взяв за определение одно из свойств, мы должны быть в состоянии доказать остальные. Далее обсудим способы доказательства консервативности силы.

1. Проверить, что A не зависит от формы пути (то есть, какой бы контур вы ни брали, $A=const$) и $\vec{F}$ не зависти от $\vec{\upsilon}$ и t.

2. Проверить, что работа по любому замкнутому контуру равна нулю $A_o = 0$ и $\vec{F}$ не зависит от $\vec{\upsilon}$ и t.

Эти способы хороши, чтобы доказать неконсервативность силы.

Пример.

Тело втащили на наклонную плоскость и столкнули так, что оно сползло, имея постоянную скорость.

$A_{F_{тр.}} = -mgh\cdot(1+k\cdot ctg\alpha) \neq 0 \Rightarrow \vec{F}_{тр.}$ – неконсервативная. Здесь k – коэффициент трения.

Для доказательства консервативности эти способы, строго говоря, не годятся, так как требуется перебрать все возможные контуры.

Универсальный способ проверки и доказательства консервативности поля основан на следующем свойстве потенциальных полей:

Любое потенциальное поле – безвихревое. Это будет подробно разобрано при изучении электростатики, но математический приём, основанный на этом свойстве, полезно освоить уже сейчас. Он заключается в следующем.

Пусть сила поля $\vec{F} = F_x(x,y,z)\cdot\vec{e}_x + F_y(x,y,z)\cdot\vec{e}_y + F_z(x,y,z)\cdot\vec{e}_z$, где $F_x, F_y, F_z -$проекции силы $\vec{F}$ на соответствующие оси.

$\vec{F}$ – консервативная сила тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial y} \end{cases}.$$

Эти условия можно сформулировать и в других системах координат, не приводя соответствующих выражений, отметим, что они также содержат равенства перекрестных производных.

Теперь легко определить для любого случая, является ли сила консервативной.

Консервативны:

1. Все однородные поля (в том числе поле силы тяжести $m\vec{g}$ *);*

2. Все поля, в которых силы зависят от одной пространственной переменной и действуют вдоль соответствующей этой переменной оси. В частности, все центральные поля – консервативные.

$$\left.\begin{aligned} &\vec{F} = f(r)\cdot\vec{e}_r + 0\cdot\vec{e}_\varphi + 0\cdot\vec{e}_\theta \\ &\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial\theta} = \frac{\partial 0}{\partial r} \equiv 0 \end{aligned}\right\}$$

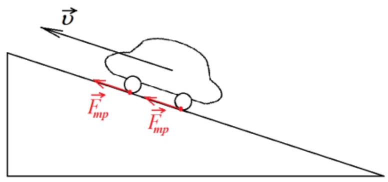
➔ любое центральное поле консервативно;
➔ кулоновское поле консервативно;
➔ гравитационное поле консервативно.

Неконсервативные силы:

1. Все силы трения – диссипативные.

сухое вязкое ≡ силы сопротивления

Работа диссипативных сил всегда ≤ 0.



<u>Вопрос 1.</u> А как насчёт автомобиля, едущего в горку, для которого $\vec{F}_{тр.}$ является движущей?

<u>Ответ.</u> $A_{тр.} = 0$, так как $\vec{\upsilon} = 0$ в точке приложения силы трения $\vec{F}_{тр.}$.

<u>Вопрос 2.</u> Но ведь потенциальная энергия возросла в поле силы тяжести, значит, кто-то эту работу совершил. Кто же?

<u>Ответ.</u> Работа силы трения равна 0, так как $\vec{F}_{тр.}$ приложена к точке, имеющей нулевую скорость. Работа силы тяжести при подъеме автомобиля на высоту h отрицательна и равна $(-mgh)$. Работа силы нормальной реакции опоры также равна 0, так как эта сила перпендикулярна перемещению. Получается, что ни одна внешняя сила, из действующих на автомобиль, не совершает положительной работы, а полная механическая энергия автомобиля возрастает. Ответственность за это увеличение энергии несет неконсервативная сила двигателя. Это она, являясь внутренней силой автомобиля, тем не менее совершает положительную работу.

<u>Замечание</u>. Этот пример наглядно иллюстрирует тот факт, что *для решения вопроса о сохранении полной механической энергии системы важна не замкнутость системы, а то, какие на нее действуют силы – консервативные или неконсервативные.* В дальнейшем это будет доказано.

2. Магнитная сила (Лоренца) и кориолисова сила – гироскопические силы. Их работа всегда $\equiv 0$, в том числе и по замкнутому контуру.

8. Расчёт потенциальной энергии частиц в конкретных консервативных полях

1. Гравитационное поле

$U(r) - U(\infty) = U = A_r = -\dfrac{\gamma Mm}{r}$ («$-$», так как перемещение совершается против $\vec{F}$)

работа сил поля по удалению частицы массы m из данной точки на ∞.

2. Кулоновское поле $U = \dfrac{Qq}{r}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ $\begin{cases} < 0 \text{ для разноимённых зарядов;} \\ > 0 \text{ для одноименных зарядов.} \end{cases}$

3. Поле сила тяжести.

Нет смысла говорить о поле на ∞, так как $m\vec{g}$ существует только в относительной близости к поверхности Земли.

$U_1 - U_2 = mgh_1 - mgh_2$;

$mgh = U$.

4. Потенциальная энергия растяжения-сжатия пружины (об удалении на бесконечность говорить бессмысленно).

$U = +\dfrac{kx^2}{2}$, так как $U_0 - U_x = -\dfrac{kx^2}{2}$.

9. Связь энергии и работы в общем случае присутствия консервативных и неконсервативных сил

1) <u>Для материальной точки.</u>

Пусть внешнее поле имеет две составляющие – консервативную (*к*) и неконсервативную (*н*). Умножим динамическое уравнение на элементарное перемещение:

$$\underbrace{m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot d\vec{r}}_{dT = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right)} = \underbrace{\vec{F}^{\,k} d\vec{r}}_{-dU} + \underbrace{\vec{F}^{\,н} d\vec{r}}_{\delta A_н}$$

$$dT = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = -dU + \delta A_н$$

$\delta A_н = dT + dU = dE.$

Следовательно, *приращение полной механической энергии частицы равно работе неконсервативных сил.*

<u>Выводы.</u>

$$T = const \ \ при \ \ A_{\substack{всех\\сил}} = 0;$$

$$E = const \ \ при \ \ A_{\substack{неконс.\\сил}} = 0;$$

$$U = const \ \ при \ \ A_{\substack{конс.\\сил}} = 0.$$

$\Delta E = A_{\substack{\text{неконс.}\\ \text{сил}}}$ – *приращение полной механической энергии = работе неконсервативных сил;*

$\Delta T = A_{\substack{\text{всех.}\\ \text{сил}}}$ – *приращение кинетической энергии = работе всех сил;*

$-\Delta U = A_{\substack{\text{конс.}\\ \text{сил}}}$ – *убыль потенциальной энергии = работе консервативных сил.*

2) <u>Для системы частиц</u> $i = 1,\ldots, N$.

Запишем II закон Ньютона для i-й частицы

$$\underbrace{m\frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt}}_{\text{равнодейств.}} = \underbrace{\vec{f}_i^{\,k} + \vec{f}_i^{\,н}}_{\text{внутр.}} + \underbrace{\vec{F}_i^{\,k} + \vec{F}_i^{\,н}}_{\text{внешн.}}$$

Умножим это уравнение на $d\vec{r}_i$ и просуммируем по всем частицам системы i, $i = 1,\ldots, N$. Тогда слева получим сумму элементарных приращений кинетических энергий частиц, а справа – суммарную работу различных сил:

$$\sum_{i=1}^{N} dT_i = \sum_{i=1}^{N}\{\underbrace{\vec{f}_i^{\,к}\cdot d\vec{r}_i}_{dA^k_{внутр.}} + \underbrace{\vec{f}_i^{\,н}\cdot d\vec{r}_i}_{dA^н_{внутр.}} + \underbrace{\vec{F}_i^{\,к}\cdot d\vec{r}_i}_{dA^k_{внешн.}} + \underbrace{\vec{F}_i^{\,н}\cdot d\vec{r}_i}_{dA^н_{внешн.}}\}.$$

$$dA^k_{внутр.} = -dU_{вз} \Rightarrow A^k_{внутр.} = -\Delta U_{вз};$$

$$dA^k_{внешн.} = -dU \Rightarrow A^k_{внешн.} = -\Delta U;$$

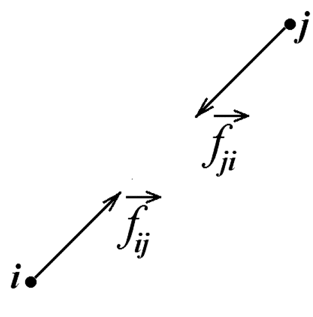
$$d\underbrace{(T + U_{вз} + U)}_{E} = dA^н_{внутр.} + dA^н_{внешн.}.$$

$U_{вз_i}$ – *потенциальная энергия взаимодействия i-й частицы со всеми остальными.*

$U_{вз}$ – величина не аддитивная, то есть $U_{вз} \neq \sum_{i=1}^{N} U_{вз_i}$, так как в сумме будут содержаться слагаемые вида:

$\vec{f}_{ij}d\vec{r}_i + \vec{f}_{ji}d\vec{r}_j = \vec{f}_{ij}(d\vec{r}_i - d\vec{r}_j)$ – изменение потенциальной энергии взаимодействия i-й и j-й частиц.

Коэффициент $\frac{1}{2}$ возникает, так как, суммируя $U_{вз_i}$ по всем частицам, мы учитываем каждый акт взаимодействия дважды.



Таким образом, все формулы, полученные для одной частицы, верны и для системы частиц:

$$A_{12\ \text{всех сил}} = T_2 - T_1 = \Delta T;$$
$$A_{12\text{конс сил}} = U_1 - U_2 = -\Delta U, \text{ где } (U = U_{вз} + U_{внеш});$$
$$A_{12\text{неконс сил}} = E_2 - E_1 = \Delta E\ .$$

Приращение полной механической энергии системы равно работе неконсервативных сил (внутренних и внешних).

$E = const$, *если нет неконсервативных сил.*

Пример.

Если два шарика, соединённых пружиной, подбросить, то их полная энергия

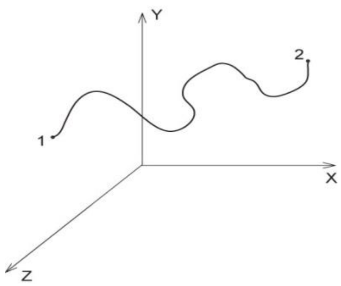
$$E = \underbrace{U_{внешн.}}_{(m_1+m_2)gh} + \underbrace{U_{вз}}_{\frac{kx^2}{2}} + \underbrace{T}_{\text{кинетическая}}.$$

10. Частные случаи вычисления работы, мощности, энергии

Если в любой точке пространства на частицу действует сила, то говорят, что частица находится в силовом поле.

Поле называется стационарным, если $\vec{F} = const(t)$, *то есть не зависит от времени.*

1. *Однородным полем называется поле, в котором в любой точке пространства на частицу действует одинаковая по величине и направлению сила.*



Примером однородного поля является поле силы тяжести $m\vec{g}$.

$$A_{12} = \int_1^2 m\vec{g}d\vec{r} = m\int_1^2 (-g\cdot\vec{e}_y)\cdot(dx\cdot\vec{e}_x + dy\cdot\vec{e}_y + dz\cdot\vec{e}_z);$$

$$\vec{g} = -g\vec{e}_y;\ d\vec{r} = dx\cdot\vec{e}_x + dy\cdot\vec{e}_y + dz\cdot\vec{e}_z;$$

$$A_{12} = -mg\cdot y\Big|_{y_1}^{y_2} = mgy_1 - mgy_2 = -mg\cdot\Delta y\ .$$

Частный случай движения в однородном поле силы тяжести – тело, брошенное под углом к горизонту. Найдём для этого случая мощность силы тяжести:

$$P = \frac{dA}{dt} = -mg\frac{dy}{dt} = -mg(\upsilon_0\sin\alpha - gt);$$

$$y = \upsilon_0\sin\alpha\cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

$P<0$ при движении к верхней точке;

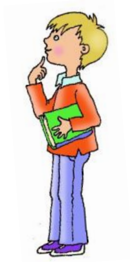
$P=0$ в верхней точке;

$P>0$ при движении от верхней точки вниз.

2. *Центральным или сферически симметричным полем называется поле, в любой точке которого сила* $\vec{F} = f(r)\dfrac{\vec{r}}{r}$, *то есть в центральном поле сила, действующая на частицу в любой точке пространства, направлена по радиусу или против радиуса, проведённого из центра поля в данную точку.*

Примеры центральных полей.

1) Работа кулоновской или гравитационной силы $\vec{F} = k\dfrac{\vec{r}}{r^3}$.



Для кулоновской силы $k = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}$, для гравитационной силы $k = -\gamma m_1 m_2$.

$$A_{12} = \int_1^2 \frac{k\vec{r}}{r^3} d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{k(xdx + ydy + zdz)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\Big|_1^2 =$$

$$= k\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}\right) = k\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Мощность $P = \dfrac{dA}{dt} = \vec{F}\vec{\upsilon} = k\dfrac{\vec{r}\vec{\upsilon}}{r^3}$, следовательно, при движении по окружности *O(R)* $\vec{\upsilon} \perp \vec{r} \Rightarrow P = 0. \Rightarrow$ *Работа и мощность центральной силы при движении по окружности O(R) равны 0.*

2) Работа гравитационной силы $A_{12} = \gamma m M\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}\right)$, то есть при:

а) $r_2 > r_1$, что соответствует удалению тела от силового центра, $A_{12}<0$;

б) $r_2 < r_1$, при приближении тела к силовому центру $A_{12}>0$.

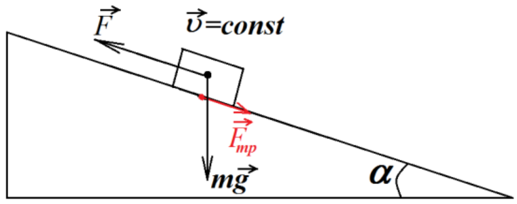
3) Работа упругой силы $\vec{F} = -k\vec{r}$:

$$A = -\int_1^2 k\vec{r}d\vec{r} = -\int_1^2 k(xdx + ydy + zdz) = -\frac{kr^2}{2}\Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{k}{2}(r_1^2 - r_2^2) \begin{cases} >0 & \text{при } r_1>r_2; \\ <0 & \text{при } r_1<r_2. \end{cases}$$

Мощность упругой силы $P = -k\vec{r}\cdot\vec{\upsilon}$.

Замечание. Для всех рассмотренных сил работа по замкнутому пути равна 0, также для всех этих сил работа зависит только от начального и конечного положения частицы, то есть не зависит от формы пути. Это обстоятельство роднит все эти силы, так как все они относятся к одному виду – консервативных сил.

Может сложиться ошибочное впечатление, что других сил, а именно неконсервативных, и не бывает.



Пример.

Пусть тело массой *m* втаскивается с $\vec{\upsilon}$ =*const* на наклонную плоскость с углом α и высотой *h*,

k – коэффициент трения.

A(*h*) – ?

При подъёме

$$\begin{cases} A(F_{тр.}) = -kmg\cos\alpha\dfrac{h}{\sin\alpha} = -kmghctg\alpha \\ A(F) = mg(\sin\alpha + k\cos\alpha)\dfrac{h}{\sin\alpha} = mgh + kmghctg\alpha \\ A(mg) = -mgh \end{cases}$$

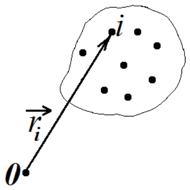
Затем под действием лёгкого толчка тело сползает с плоскости также с постоянной скоростью $\vec{\upsilon}$ = const.

$$\left.\begin{matrix} \uparrow A_{тр.} = -\dfrac{mg\sin\alpha}{\sin\alpha}h = -mgh \\ \downarrow A_{mg} = mg\sin\alpha\dfrac{h}{\sin\alpha} = mgh \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_{mg} = 0 \text{ на замкнутом пути.}$$

$A_{тр.} \neq 0 = -mgh(1 + kctg\alpha) < 0$ работа на замкнутом пути.

11. Центр масс системы

Определим положение центра масс системы, задав его радиус-вектор $\vec{R}_c$.



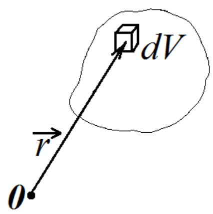
1. Для дискретной системы материальных точек $i = 1,2,3...n$.

Опред. $\vec{R}_c = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{m}$ – *радиус-вектор центра масс системы.*

Здесь и в следующих параграфах *m* – суммарная масса системы.

2. Для тела (непрерывное распределение массы).

Плотность тела $\rho = \dfrac{dm}{dV}$ – локальная характеристика.

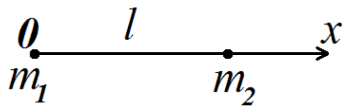


Опред. $\vec{R}_c = \dfrac{\int_M \vec{r}\cdot dm}{\int_M dm} = \dfrac{\int_V \rho(\vec{r})\cdot\vec{r}\cdot dV}{\int_V \rho(\vec{r})\cdot dV}$.

Примеры.

1. Возьмём ось *x* с началом координат в точке с массой m_1 и вычислим положение центра

масс этой системы:

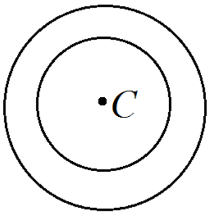


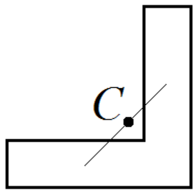
$$\vec{R}_c = \frac{0\cdot m_1 + l\cdot m_2}{m_1+m_2}\vec{e}_x;$$

$$x_c = \frac{lm_2}{m_1+m_2} = a\,; \quad \frac{lm_1}{m_1+m_2} = b\,.$$

$m_1 a = m_2 b$, то есть чем больше масса, тем ближе к ней центр масс.

2. Центр масс не всегда принадлежит самому телу.





12. Закон движения центра масс. Система центра масс

Опред. $\vec{V}_c = \dfrac{d\vec{R}_c}{dt}$ *– скорость движения центра масс.*

Найдем уравнение, описывающее движение центра масс, используя II закон Ньютона

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{внеш}.$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_i = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}\frac{\sum m_i}{\sum m_i} = \sum m_i\cdot\frac{d}{dt}\Big[\frac{d}{dt}\Big(\frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i}\Big)\Big] = \sum_{i=1}^{N} m_i\frac{d^2\vec{R}_c}{dt^2} = m\frac{d^2\vec{R}_c}{dt} \Rightarrow$$

$$m\frac{d^2\vec{R}_c}{dt^2} = \vec{F}_{внеш} \text{ – уравнение движения центра масс.}$$

Ускорение центра масс $\vec{w}_c = \dfrac{\vec{F}_{внеш}}{m} = \dfrac{d\vec{V}_c}{dt}$.

Скорость центра масс $\vec{V}_c = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \dfrac{\vec{p}}{m}$.

Теорема о движении центра масс.

Центр масс движется так, как двигалась бы материальная точка с массой m под действием всех сил, приложенных к системе.

Если система замкнута, то $(\vec{w}_c = 0$ *и* $\vec{V}_c = const)$ *её центр масс движется равномерно и прямолинейно* $\Rightarrow$ определение системы центра масс.

Система центра масс Ц-система – система отсчёта, в которой центр масс покоится.

Будем обозначать все величины в *Ц*-системе со знаком “~” – титло (так буквы у древних славян, “надевая” титло, превращались в цифры).

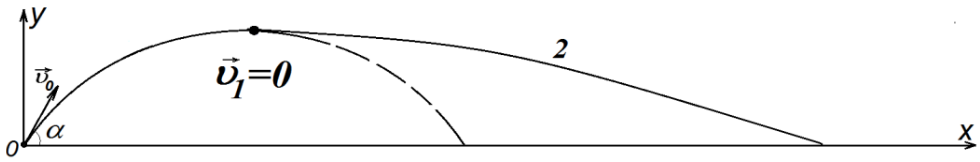
Суммарный импульс в Ц-системе $\tilde{\vec{p}}_c = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i} \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} m_i = m\tilde{\vec{V}}_c = 0 \cdot m = 0.$

Если снаряд разрывается в какой-либо точке своей параболической траектории на множество мелких осколков, которые под действием внутренних сил будут разлетаться, то центр масс системы осколков будет продолжать двигаться по первоначальной параболе, так как внутренние силы не могут изменить характер движения центра масс.

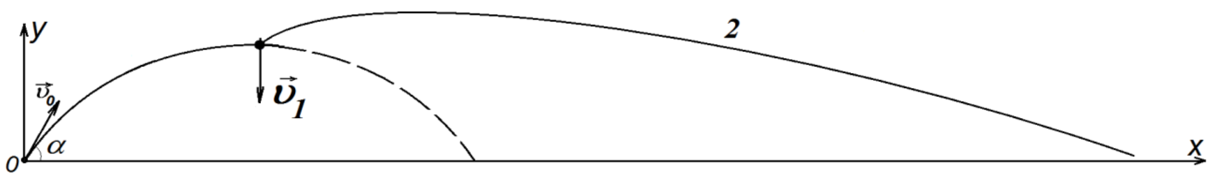
<u>Пример.</u>

Снаряд разрывается в верхней точке траектории на 2 одинаковых осколка, причём первый осколок падает на землю под точкой разрыва. Изобразить примерную траекторию движения второго осколка, если

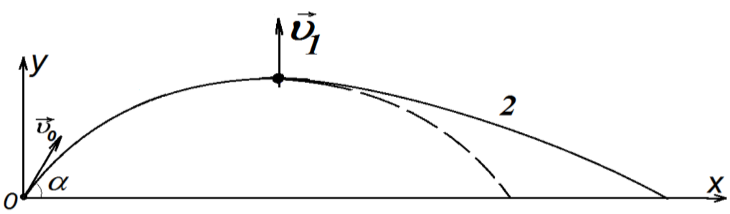
а) время падения $t_1 = t_2$



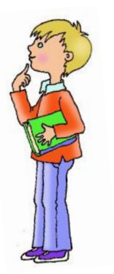
б) $t_1 < t_2$



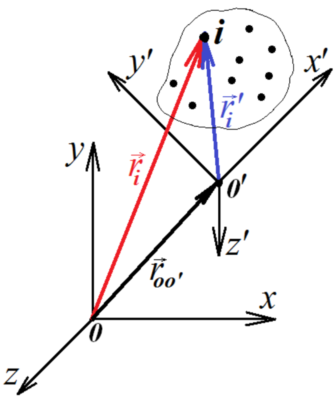
в) $t_1 > t_2$



----- – траектория движения центра масс системы осколков.



13. Преобразование импульса при переходе из одной системы координат в другую



В K-системе $\vec{p}=\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_i$.

$$\vec{r}_i=\vec{r}_i{}'+\vec{r}_{OO'};$$

$$\vec{\upsilon}_i=\vec{\upsilon}_i'+\vec{\upsilon}_{O'}\Big|\cdot m_i .$$

После суммирования по всем i точкам системы получим $\vec{p}=\vec{p}\,'+m\vec{\upsilon}_{O'}$.

Если $\vec{\upsilon}_{O'}=\vec{V}_c$ и точка $O'\equiv$ точке C – центр масс, тогда система K' суть $Ц$-система.

$\vec{p}=\tilde{\vec{p}}+m\vec{V}_c$, но так как $\tilde{\vec{p}}=0$, то, следовательно, $\vec{p}=m\vec{V}_c$, то есть *импульс системы равен произведению массы системы на скорость центра масс.*

14. Преобразование кинетической энергии при переходе из одной системы координат в другую (теорема Кёнига)

Воспользуемся рисунком §13 для вывода преобразования кинетической энергии системы частиц, обозначив скорость точки O` (начала координат $K$`-системы) $\vec{\upsilon}_{O'}=\vec{V}$.

$$T=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i\upsilon_i^2}{2}=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i(\vec{\upsilon}_i'+\vec{V})^2}{2}=\sum_{i=1}^{N}\frac{m\upsilon_i'^2}{2}+\vec{V}\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{\upsilon}_i'+\sum_{i=1}^{N}\frac{m_iV^2}{2}=T'+\vec{V}\cdot\vec{p}\,'+\frac{mV^2}{2}.$$

Для случая, когда K`-система является $Ц$-системой, точка $O$` является центром масс системы – точкой $C \Rightarrow$

$\vec{V}=\vec{V}_c$, $\vec{p}\,'=\tilde{\vec{p}}=0 \Rightarrow$ получаем теорему Кёнига для кинетической энергии.

<u>Теорема Кёнига.</u>

$T=\tilde{T}+\dfrac{mV_c^{\,2}}{2}$, то есть *кинетическая энергия системы складывается из двух частей:*

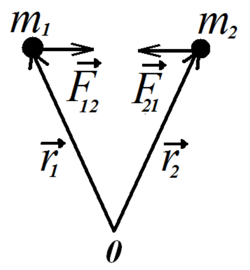
1) *энергии движения частиц относительно центра масс;*

2) *кинетической энергии движения системы “как целого”, которая равна кинетической энергии массы всей системы, сосредоточенной в центре масс и движущейся со скоростью* $\vec{V}_c$ *центра масс.*

15. Приведённая масса (задача двух тел)

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух тел m_1 и m_2.
Как они будут двигаться? Запишем уравнения динамики и учтем III закон Ньютона:

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12} \\ m_2 \dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{21}; \\ \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \end{cases}$$



$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{dt^2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \vec{F}_{12}.$$

$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}$ определяет положение m_1 относительно m_2.

<u>Опред.</u> $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – *приведённая масса.*

$\mu \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$ – *задача о движении одной частицы в силовом поле другой* (в данном случае о движении первой частицы в поле второй частицы).

<u>Теорема о движении центра масс:</u>

$\vec{V}_c = const = \dfrac{m_1\vec{\upsilon}_{01} + m_2\vec{\upsilon}_{02}}{m_1 + m_2}$ *описывает движение центра масс данной системы.*

16. Абсолютно неупругий удар

<u>Опред.</u> *Абсолютно неупругий удар – столкновение двух тел, в результате которого они соединяются и движутся как единое целое.*

Физическая картина сложная: деформации, упругие силы, силы трения, в результате возникают колебания и волны, но механики это не касается, ей важно, что тела движутся как единое целое.

Система замкнутая $\Rightarrow$ $\vec{P} = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = const = (m_1 + m_2)\vec{V}' \Rightarrow$

$$\vec{V}' = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \vec{V}' = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}$$ – скорость после удара.

Энергия до удара: $T_0 = \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2};\ U_0 = 0.$

<u>Внимание:</u> *замкнутость системы не обеспечивает сохранения энергии системы!*

При абсолютно неупругом ударе энергия не сохраняется.

$$T_0 \neq T = \frac{(m_1+m_2)}{2}\upsilon'^2 = \frac{(m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2)^2}{2(m_1+m_2)} = \frac{m_1^2\upsilon_1^2 + m_2^2\upsilon_2^2 + 2m_1m_2\vec{\upsilon}_1\vec{\upsilon}_2}{2(m_1+m_2)};$$

$$-\Delta T = T_0 - T = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} - \frac{m_1^2\upsilon_1^2 + m_2^2\upsilon_2^2 + 2m_1m_2\vec{\upsilon}_1\vec{\upsilon}_2}{2(m_1+m_2)} =$$

$$= \frac{m_1^2\upsilon_1^2 + m_2m_1\upsilon_1^2 + m_2^2\upsilon_2^2 + m_1\upsilon_2^2 m_2 - \upsilon_1^2 m_1^2 - m_2^2\upsilon_2^2 - 2m_1m_2\vec{\upsilon}_1\vec{\upsilon}_2}{2(m_1+m_2)} =$$

$$= \frac{m_1m_2(\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 - 2\vec{\upsilon}_1\vec{\upsilon}_2)}{2(m_1+m_2)} = \frac{\mu(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2)^2}{2};$$

$$\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon}_{отн}.$$

Убыль кинетической энергии при абсолютно неупругом ударе $= \dfrac{\mu\upsilon_{отн}^2}{2}$ *равна потере доли первоначальной кинетической энергии, связанной с относительным движением тел друг относительно друга до удара.*

Это можно показать в *Ц*-системе:

$$\vec{V}_c = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1+m_2};$$

$$\tilde{\vec{P}}_1 = m_1(\vec{\upsilon}_1 - \vec{V}_c) = \mu(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2) = \mu\vec{\upsilon}_{отн};$$

$$\tilde{\vec{P}}_2 = m_2(\vec{\upsilon}_2 - \vec{V}_c) = \mu(\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1) = -\mu\vec{\upsilon}_{отн}.$$

По теореме Кёнига:

$$T_0 = \frac{\tilde{\vec{p}}_1^{\,2}}{2m_1} + \frac{\tilde{\vec{p}}_2^{\,2}}{2m_2} + \frac{(m_1+m_2)V_c^2}{2} = \mu^2\upsilon_{отн}^2\frac{m_1+m_2}{2m_1m_2} + \frac{m_1+m_2}{2}\upsilon_{отн}^2 = \frac{\mu\upsilon_{отн}^2}{2} + \frac{mV_c^2}{2} \Rightarrow$$

равнодействующая = 0.

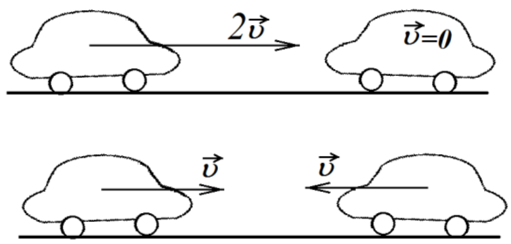
Сохраняется только кинетическая энергия движения центра масс системы $T = \dfrac{mV_c^2}{2} = const$, так как система замкнутая и внешних сил нет.

Пример.

Рассмотрим два автомобиля, представленные на рисунках. Вообще-то, это задачи двух тел:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\mu = \vec{F}..$$

Здесь $\vec{F}$ – диссипативная сила, её работа и отвечает за убыль кинетической и полной энергии в обоих случаях.

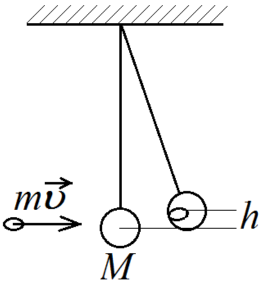


Ещё один вывод: разрушительное действие при столкновении зависит от $\upsilon_{отн}$. Если $m_1 = m_2 = m$, вся убыль кинетической энергии $-\Delta T = m\upsilon_{отн}^2$ идёт на разрушение.

Вопрос. Почему не сохраняется T ?

Ответ. Так как действует внутренняя диссипативная сила, ее работа отрицательна и обеспечивает уменьшение полной и кинетической энергии системы $\Delta E = \Delta T = A_{неконс.\ внутр.}$.

Задача.



Математический маятник массой M на подвесе длиной L.
В маятнике M застревает пуля m, летевшая со скоростью $\vec{\upsilon}_0$.
Найти максимальную высоту подъёма маятника h.

Решение.

1. Закон сохранения импульса в горизонтальном направлении:

$$m\upsilon_0 = (M+m)\upsilon,$$

$$\upsilon = \frac{m\upsilon_0}{M+m}.$$

2. Закон сохранения энергии в поле консервативных сил.

Вопрос. $F_н$ – консервативная?

Ответ. Да, так как эта сила центральная и не зависит от скорости.

$$\frac{(M+m)\upsilon^2}{2} = (M+m)gh \Rightarrow h = \frac{m^2\upsilon_0^2}{(m+M)^2 2g} = \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \frac{\upsilon_0^2}{2g};$$

$$-\Delta T = \frac{m\upsilon_0^2}{2} - \frac{M+m}{2}\frac{m^2\upsilon_0^2}{(M+m)^2} = \frac{m\upsilon_0^2}{2}\left(1-\frac{m}{M+m}\right) =$$

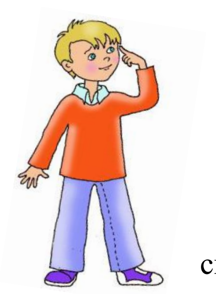
$$-\Delta T = \frac{m\upsilon_0^2}{2} - \frac{M+m}{2}\frac{m^2\upsilon_0^2}{(M+m)^2} = \frac{m\upsilon_0^2}{2}\left(1-\frac{m}{M+m}\right) =$$

$= \dfrac{mM\upsilon_0^2}{2(m+M)} = \dfrac{\mu\upsilon_{отн}^2}{2}$ – это убыль кинетической энергии, что и требовалось доказать.

Замечание. В данном случае нельзя использовать закон сохранения энергии до и после удара в следующем виде:

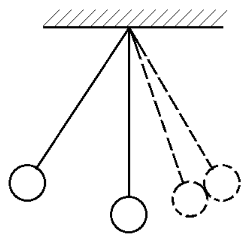
$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = (M+m)g\hat{h} \Rightarrow$$

$$\hat{h} = \frac{m}{M+m}\frac{\upsilon_0^2}{2g} >> h \Rightarrow$$



Вывод: истинная высота подъема в $\dfrac{m}{M+m}$ раз меньше $\hat{h}$.

Вопрос. Если первый шар был поднят на h_0, на сколько поднимутся два шара вместе при абсолютно неупругом ударе?



Ответ. $h = \left(\dfrac{m}{M+m}\right)^2 h_0 = \dfrac{1}{4}h_0 \Rightarrow \dfrac{h}{h_0} = \left(\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2.$

17. Абсолютно упругий центральный удар

Опред. *Столкновение двух тел, в результате которого их внутренняя энергия не меняется, называется абсолютно упругим ударом.*

Удар называется центральным, если скорости шаров направлены вдоль прямой, соединяющей их центры.

В чистом виде абсолютно упругий удар может быть реализован только в микромире при столкновении элементарных частиц, атомов и ядер. Так как в микромире состояния квантованы, то, если кинетические энергии сталкивающихся частиц недостаточны, чтобы перевести хотя бы одну из частиц в возбужденное состояние, реализуется абсолютно упругий удар. Для реальных тел макромира этот процесс осложняется возникновением в процессе упругой деформации упругих возмущений + излучения звуковых волн + внутреннего трения + остаточных деформаций.

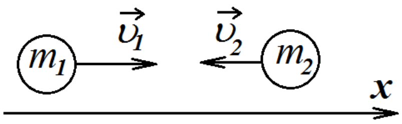
Для макромира: удар называется *“упругим”, если считается, что в процессе соприкосновения действуют только упругие силы, а они – консервативные* (и не могут изменить полную механическую энергию системы $\Delta E = 0$), *внешних сил нет* ($\vec{P} = const$), *на расстоянии взаимодействия нет* ($U_{до} = 0 = U_{после}$) $\Rightarrow$ $\begin{cases} \Delta E = 0 \\ \Delta U = 0 \leftarrow до\ и\ после\ удара \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ \Delta T = 0\ \Rightarrow \begin{cases} T = const; \\ \vec{p}_{\Sigma} = const,\ так\ как\ система\ замкнута. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу абсолютно упругого столкновения двух тел, имевших до соударения импульсы $m_1\vec{\upsilon}_1$ и $m_2\vec{\upsilon}_2$. Наша задача найти скорости $\vec{\upsilon}_1'$ и $\vec{\upsilon}_2'$, которые будут иметь тела после соударения.

Запишем законы сохранения в лабораторной системе:

$$\begin{cases} T_0 = \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \dfrac{m_1\upsilon_1'^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2'^2}{2}; \\ m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{\upsilon}_1' + m_2\vec{\upsilon}_2'. \end{cases}$$



Неизвестных – 6, а уравнений – 4! Мы не использовали условие центральности удара, учет которого оставит нам только *x* компоненты скоростей $\vec{\upsilon}_1'$ и $\vec{\upsilon}_2'$, однако и теперь найти искомые скорости непросто. Эту задачу рекомендуется решать в Ц-системе.

Скорость центра масс

$$\vec{V}_c = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \begin{matrix} \tilde{\vec{\upsilon}}_1 = \vec{\upsilon}_1 - \vec{V}_c \Rightarrow \tilde{\vec{p}}_1 = \mu(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2) \\ \tilde{\vec{\upsilon}}_2 = \vec{\upsilon}_2 - \vec{V}_c \Rightarrow \tilde{\vec{p}}_2 = \mu(\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1) \end{matrix}.$$

В Ц-системе суммарный импульс частиц всегда равен 0:

$$\tilde{\vec{p}}_1 + \tilde{\vec{p}}_2 = 0 = \tilde{\vec{p}}_1' + \tilde{\vec{p}}_2' \Rightarrow \tilde{\vec{p}}_1' = -\tilde{\vec{p}}_2'.$$

Закон сохранения энергии в *Ц*-системе:

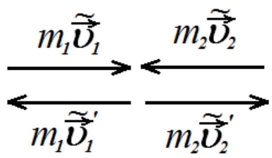
$$\frac{m_1\tilde{\upsilon}_1^{\,2}}{2}+\frac{m_2\tilde{\upsilon}^{\,2}_2}{2}=\frac{\tilde{p}_1^{\,2}}{2m_1}+\frac{\tilde{p}_2^{\,2}}{2m_2}=\frac{(\tilde{p}_1')^2}{2m_1}+\frac{(\tilde{p}_2')^2}{2m_2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\tilde{p}_1^{2}}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)=\frac{(\tilde{p}_1')^2}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\Rightarrow$$

$\begin{cases}\tilde{\upsilon}_1^2=\tilde{\upsilon}_1'^2\\ \tilde{\upsilon}_2^2=\tilde{\upsilon}_2'^2\end{cases}$ + (так как удар центральный, то упругая сила действует вдоль направления первоначального движения) $\Rightarrow\begin{matrix}\tilde{\upsilon}_1=\pm\tilde{\upsilon}_1'\\ \tilde{\upsilon}_2=\pm\tilde{\upsilon}_2'\end{matrix}$, $(+\tilde{\upsilon}_i$ не имеет физического смысла) $\Rightarrow$

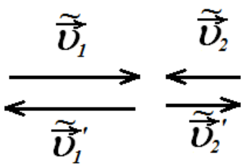
$\tilde{\upsilon}_i'=-\tilde{\upsilon}_i,\ i=1,2.$

То есть в *Ц*-системе диаграмма центрального упругого удара имеет следующий вид:



<u>Вывод.</u> *В Ц-системе центральное упругое столкновение двух частиц приводит к изменению направления скорости каждой частицы на противоположное, без изменения величины скорости.*

Диаграмма скоростей при условии $m_1<m_2$:



Тогда легко получить искомые скорости частиц $\vec{\upsilon}_1'$ и $\vec{\upsilon}_2'$ в лабораторной системе отсчёта:

$$\vec{\upsilon}_1'=\tilde{\vec{\upsilon}}_1'+\vec{V}_c=-\tilde{\vec{\upsilon}}_1+\vec{V}_c=-(\vec{\upsilon}_1-\vec{V}_c)+\vec{V}_c=2\vec{V}_c-\vec{\upsilon}_1.$$

Аналогично для второй частицы, так как задача полностью симметрична.

$$\vec{\upsilon}_2'=2\vec{V}_c-\vec{\upsilon}_2\,.$$

Эти формулы простые и их легко запомнить, так как физически ясно, откуда они берутся. Повторим ещё раз всю цепочку наших рассуждений.

1. Переходим в *Ц*-систему, там:

$$\tilde{\vec{\upsilon}}_i=\vec{\upsilon}_i-\vec{V}_c,\ \ i=1,2.$$

2. В *Ц*-системе скорость после удара меняет своё направление и не меняет величину:

$$\tilde{\vec{\upsilon}}_i'=-\tilde{\vec{\upsilon}}_i=\vec{V}_c-\vec{\upsilon}_i\,.$$

3. Совершаем обратный переход в лабораторную систему:

$$\vec{\upsilon}_i'=\tilde{\vec{\upsilon}}_i+\vec{V}_c=2\vec{V}_c-\vec{\upsilon}_i\,.$$

Теперь, зная, что $\vec{V}_c=\dfrac{m_1\vec{\upsilon}_1+m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1+m_2}$, можно получить скорости частиц 1 и 2 после центрального упругого удара в лабораторной системе:

$$\vec{\upsilon}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{\upsilon}_1 + \frac{2m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2};$$

$$\vec{\upsilon}_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\vec{\upsilon}_2 + \frac{2m_1\vec{\upsilon}_1}{m_1 + m_2}.$$

Частные случаи.

Пусть второй шар покоился до удара, то есть $\upsilon_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{\upsilon}_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{\upsilon}_1 \\ \vec{\upsilon}_2' = \dfrac{2m_1\vec{\upsilon}_1}{m_1 + m_2} \end{cases}.$

1. $m_1 = m_2$ $\begin{cases} \vec{\upsilon}_1' = 0 \\ \vec{\upsilon}_2' = \vec{\upsilon}_1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ то есть первый шар остановился, а второй движется как первый до удара.

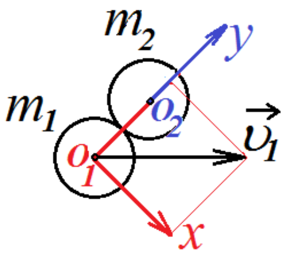
2. $m_2 >> m_1$ $\begin{cases} \vec{\upsilon}_1' \approx -\vec{\upsilon}_1 \\ \vec{\upsilon}_2' \approx 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ первый шар отлетает назад $\equiv$ удар об стенку

3. $m_1 >> m_2$ $\begin{cases} \vec{\upsilon}_1' \approx \vec{\upsilon}_1 \\ \vec{\upsilon}_2' \approx 2\vec{\upsilon}_1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ большой шар наподдает маленький и не замечает этого $\Rightarrow$

МОРАЛЬ: БЕРЕГИСЬ АВТОМОБИЛЯ!

18. Нецентральный упругий удар шаров с равными массами

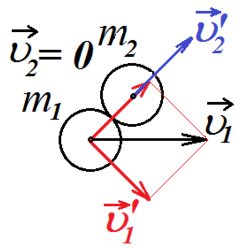
Опред. *Нецентральный удар – столкновение, при котором в момент удара начальные скорости шаров не совпадают по направлению с линией центров.*



Пусть $m_1 = m_2$ и m_2 покоится.

Спроектируем $\vec{\upsilon}_1$ на $\vec{\tau} = x$ и $\vec{n} = y$, O_1O_2 – линия центров в момент удара, и запишем закон сохранения импульса в проекциях на $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$:

$$\begin{cases} \upsilon_{1\tau} = \upsilon_{1\tau}' + \upsilon_{2\tau}' \\ \upsilon_{1n} = \upsilon_{1n}' + \upsilon_{2n}' \\ \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} = \dfrac{m_1\upsilon_1'^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2'^2}{2} \end{cases}$$



Здесь 3 уравнения и 4 неизвестных. Чтобы решить, нужно иметь ещё одно уравнение. Логично предположить, что при столкновении тангенциальных сил не возникает:

$$F_\tau = 0 \Rightarrow \begin{cases} \upsilon_{1\tau} = \upsilon_{1\tau}' \\ \upsilon_{2\tau}' = 0 \end{cases}.$$

Если $m_1 = m_2 \Rightarrow \begin{cases} \upsilon_{1n}' = 0 \\ \upsilon_{2n}' = \upsilon_{1n} = \upsilon' \end{cases} \Rightarrow$ шары разлетаются под прямым углом. На этом принципе основана игра в бильярд.

<u>Вывод.</u> *При столкновении гладких идеально упругих шаров их тангенциальные скорости не меняются, а нормальные меняются так же, как скорости при центральном ударе:*

$$\begin{cases}\tilde{\upsilon}_1^2=\tilde{\upsilon}_1'^2\\ \tilde{\upsilon}_2^2=\tilde{\upsilon}_2'^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left|\tilde{\vec{p}}_1\right|=\left|\tilde{\vec{p}}_1'\right|\\ \left|\tilde{\vec{p}}_2\right|=\left|\tilde{\vec{p}}_2'\right|\end{cases}.$$

Для получения результата $\tilde{\vec{\upsilon}}_1=-\tilde{\vec{\upsilon}}_1'$ в случае центрального удара мы использовали условия упругости удара, замкнутости системы и центральности удара. Первые 2 условия остаются в силе, а условие центральности нарушается для нецентрального удара, поэтому модули импульса в Ц-системе сохраняются, но направление не обязательно меняется на противоположное.

Если $\upsilon_2=0$, то $\vec{V}_c=\dfrac{m_1\vec{\upsilon}_1}{m_1+m_2}$;

$$\left|\tilde{\vec{p}}_2\right|=\mu\upsilon_{отн}=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1=m_2V_c\,.$$

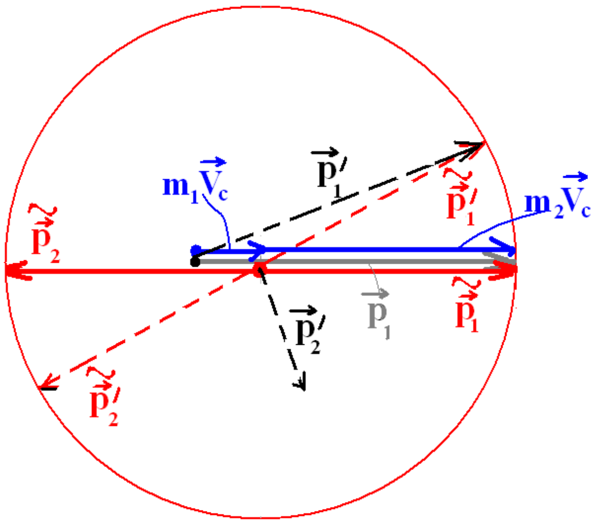
В этом случае векторная диаграмма имеет вид, представленный на рисунке.

$\tilde{\vec{p}}_1=m_1\vec{\upsilon}_1-\dfrac{m_1^2\vec{\upsilon}_1}{m_1+m_2}=\dfrac{m_1m_2\vec{\upsilon}_1}{m_1+m_2}=\mu\vec{\upsilon}_1=m_2\vec{V}_c$ – импульс 1-й частицы в Ц-системе до соударения;

$\tilde{\vec{p}}_2=-\dfrac{m_1m_2\vec{\upsilon}_1}{m_1+m_2}$ – импульс 2-й частицы в Ц-системе до соударения;

$\vec{p}_1'=\tilde{\vec{p}}_1'+m_1\vec{V}_c$ – импульс 1-й частицы после соударения;

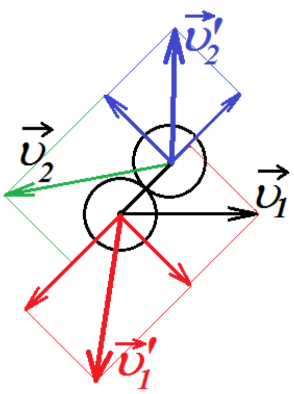
$\vec{p}_2'=\tilde{\vec{p}}_2'+m_2\vec{V}_c$ – импульс 2-й частицы после соударения.



<u>Пример.</u>

$m_1=m_2$.

1. Проецируем скорости $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ на OO'.



Так как массы шаров равны, то они обмениваются нормальными составляющими: $\upsilon'_{1_\perp}=\upsilon_{2_\perp}$, $\upsilon'_{2_\perp}=\upsilon_{1_\perp}$.

2. В касательном направлении силы не действуют, поэтому касательные составляющие скоростей у каждого из шаров останутся неизменными $\upsilon'_{1_\tau}=\upsilon_{1_\tau}$ и $\upsilon'_{2_\tau}=\upsilon_{2_\tau}$.

19. Уравнение движения частицы с переменной массой (уравнение Мещерского). Формула Циолковского

Пусть в момент t частица имеет массу m и импульс $\vec{p}(t) = m\vec{\upsilon}$.

В момент $(t+dt)$ импульс $\vec{p}(t+dt) = (m+dm)(\vec{\upsilon}+d\vec{\upsilon}) + dm_г\vec{\upsilon}_г$.

$dm_г\vec{\upsilon}_г$ – произведение исторгнутой массы газов на их скорость.

Из закона сохранения массы: $dm + dm_г = 0$.

$$\vec{p}(t+dt) = m\vec{\upsilon} + dm\vec{\upsilon} + md\vec{\upsilon} + dmd\vec{\upsilon} - dm\vec{\upsilon}_г \quad (dmd\vec{\upsilon} \approx 0);$$

$$d\vec{p} = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = md\vec{\upsilon} - dm(\vec{\upsilon}_г - \vec{\upsilon}).$$

Здесь $\vec{\upsilon}_г - \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_{отн}$– скорость истечения газов относительно ракеты суть относительная скорость истечения газов.

$$d\vec{p} = \vec{F}_{внеш}dt = md\vec{\upsilon} - dm\vec{\upsilon}_{отн}.$$

<u>*Уравнение Мещерского (уравнение движения частицы с переменной массой):*</u>

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}_{внеш} + \frac{dm}{dt}\vec{\upsilon}_{отн}.$$

При $\vec{F}_{внеш} = 0$ и $\vec{\upsilon}_{отн} = const$ имеем

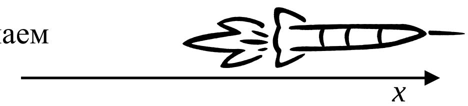
$$md\vec{\upsilon} = dm\vec{\upsilon}_{отн}.$$

Интегрируем полученное выражение по $d\vec{\upsilon}$ от $\vec{\upsilon}_0$ до $\vec{\upsilon}$ (левая часть) и по dm от m_0 до m:

$$\vec{\upsilon}_{отн}\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} = \int_{\vec{\upsilon}_0}^{\vec{\upsilon}} d\vec{\upsilon} \Rightarrow \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{\upsilon}_{отн}\ln\frac{m}{m_0}.$$

В проекциях на направление движения получаем

$$\upsilon = \upsilon_0 + \upsilon_{отн}\ln\frac{m_0}{m}.$$



Здесь стоит знак “$+$”, потому что знак меняется два раза: при отрицательной проекции $\vec{\upsilon}_{отн}$ на ось x, при изменении отношения под логарифмом $\ln$.

Если $\upsilon_0 = 0$, получаем формулу для расчета топлива:

$e^{\frac{\upsilon}{\upsilon_{отн}}} = \dfrac{m_0}{m}$ – *формула Циолковского для расчёта запаса топлива.*

В современных ракетах на химическом топливе $\upsilon_{отн} < 4\dfrac{км}{с}$. Исходя из этого ограничения, можно оценить перспективы космических полётов в ракетах на химическом топливе.

20. Космические скорости

1. Первая космическая скорость – скорость, с которой тело двигается по круговой орбите с радиусом $R \approx R_з$ *вокруг Земли.*

Из динамики:

$$-\vec{e}_r \frac{m\upsilon_I^2}{R} = -\gamma \frac{mM}{R^2}\vec{e}_r\,;$$

$$\upsilon_I = \sqrt{gR_з} \text{ – } I \textit{ космическая скорость.}$$

$$R_з = 6{,}4\cdot 10^3\,км = 6{,}4\cdot 10^6\,м \rightarrow \upsilon_I \approx 8\cdot 10^3\,\frac{м}{с}.$$

Для достижения υ_I необходимо, чтобы $\frac{m_0}{m} \approx 7{,}4$.

2. Вторая космическая скорость – скорость, необходимая, чтобы преодолеть поле притяжения Земли.

Она определяется из закона сохранения энергии: $A = U_1 - U_2 = T_2 - T_1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} U_1 = -\gamma \dfrac{mM}{R_з} \\ U_2 = 0 \\ T_2 = 0 \\ T_1 = \dfrac{m\upsilon_{II}^2}{2} \end{cases} \Rightarrow -\gamma\frac{mM}{R_з} = -mgR_з = \frac{m\upsilon_{II}^2}{2} \Rightarrow \upsilon_{II} = \sqrt{2gR_з} \approx 11{,}2\,\frac{км}{с} \quad (\upsilon_{II} = \upsilon_I\sqrt{2}\ !!!)$$

$$\upsilon_{II} = \sqrt{2gR_з} \text{ – } II \textit{ космическая скорость.}$$

Для достижения υ_{II} необходимо, чтобы $\frac{m_0}{m} \approx 17$ при $\upsilon_{отн} = 4\,\frac{км}{с}$.

3. Третья космическая скорость – скорость, необходимая, чтобы улететь из Солнечной системы (она зависит от направления начальной скорости ракеты).

$$\begin{cases} l \approx 1{,}5\cdot 10^8\,км \text{ – } \textit{среднее расстояние до Солнца}; \\ \upsilon \approx 30\,\dfrac{км}{с} \text{ – } \textit{средняя скорость движения Земли вокруг Солнца}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\upsilon_{III} \approx \upsilon\sqrt{2} \approx 42\,\frac{км}{с} \text{ – } III \textit{ космическая скорость относительно Солнца.}$$

Здесь υ – скорость орбитального движения Земли вокруг Солнца.

Если осуществлять запуск в направлении против орбитального вращения Земли, то $\upsilon_{III_{\max}} \approx 72{,}7\,\frac{км}{с}$.

В направлении орбитального вращения Земли $\upsilon_{III_{\min}} = 16{,}7\,\frac{км}{с} \rightarrow \frac{m_0}{m} \approx 64$.

Хотя число $\frac{m_0}{m}$ не безумно большое, однако следует учесть, что в полете необходимо:

1) корректировать орбиту,
2) приземлиться на другую планету,
3) хотелось бы ещё и вернуться.

Пусть летим к такой же планете, как и Земля, $\Rightarrow \frac{m_0}{m} \approx 60$, даже пренебрегая корректировкой орбиты и вопросами посадки $\frac{m_0}{m} \approx 60$ – и это только туда! Тогда, чтобы долететь туда и обратно, $\frac{m_0}{m} = 3600$!!! Нужно принимать во внимание, что от ближайшей звезды свет идёт к нам порядка четырёх лет. Чтобы долететь, надо иметь скорости порядка световых. Но даже для достижения $\upsilon = 10^{-3}c$ (c – скорость света) при $\upsilon_{отн} = 10\frac{км}{с}$ (что, видимо, недостижимо на химическом топливе), потребуется $\frac{m_0}{m} = 10^{13}$.

υ	$\tau_{движ}$	$\frac{m_0}{m}$	$m_{\min}$
$10^{-3}c$	$4\cdot10^3$ лет в один конец	10^{13}	
$10^{-2}c$	400 лет	$2\cdot10^{130}$	
$0{,}5\cdot10^{-2}c$	800 лет	10^{65}	10^5 кг

Так как продолжительность жизни у нас пока на порядок меньше требуемой для таких полетов, то очевидно, что для межзвёздных полётов ракеты на химическом топливе не пригодны. Возможно, решением проблемы могла бы стать фотонная ракета с $\upsilon_{отн} \approx c$, работающая на принципе превращения вещества в излучение.

В релятивизме формула Циолковского имеет вид:

$$\frac{m_0}{m} = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{c}{2\upsilon_{отн}}}, \quad где\ \beta = \frac{\upsilon}{c}.$$

Она переходит при $\beta << 1$ в ранее полученную формулу Циолковского:

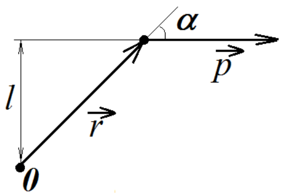
$$\frac{1+\beta}{1-\beta} \approx 1+2\beta \Rightarrow \frac{m_0}{m} = (1+2\beta)^{\frac{c}{2\upsilon}\frac{\upsilon}{\upsilon_{отн}}} = \left[(1+2\beta)^{\frac{1}{2\beta}}\right]^{\frac{\upsilon}{\upsilon_{отн}}} = e^{\frac{\upsilon}{\upsilon_{отн}}}.$$

21. Момент импульса частицы относительно точки и относительно оси

1. Момент импульса относительно точки.

Опред. *Пусть материальная точка имеет в данный момент времени* t *импульс* $\vec{p}$ *, находясь в точке* $\vec{r}$ *. Говорят, что её момент импульса относительно точки* O:

$\vec{M}_0 = [\vec{r}, \vec{p}]$.



$\vec{M}_0$ *– псевдовектор,* $\perp$ *плоскости, содержащей* $\vec{r}$ и $\vec{p}$.

$|\vec{M}_0| = rp\sin\alpha = lp$, *где* l *– плечо импульса относительно точки* O.

Плечо – кратчайшее расстояние от т. O *до прямой, проведённой через импульс* $\vec{p}$.

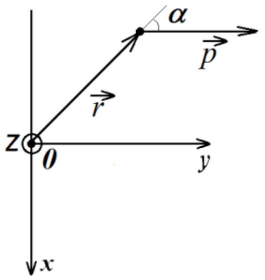
$$\vec{M}_0 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x(p_z y - p_y z) - \vec{e}_y(xp_z - zp_x) + \vec{e}_z(xp_y - yp_x).$$

Замечание. Если выбрать систему координат так, чтобы $\vec{r} \in (x, y)$ и $\vec{p} \in (x, y)$, то $\vec{M}_0 = \vec{e}_z(xp_y - yp_x)$.

2. Момент импульса относительно оси.

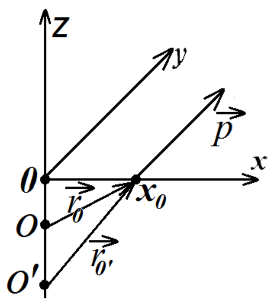
Опред. *Моментом импульса данной частицы относительно оси, проходящей через точку* O*, называется проекция* $\vec{M}_0$ *на эту ось:*

$M_z \equiv [\vec{r}, \vec{p}]_z = p_y x - p_x y$.



В данном случае: $M_z = -rp\sin\alpha = xp;\ x = -r\sin\alpha$.

Докажем, что *момент импульса частицы относительно произвольной оси не зависит от того, для какой точки* O *на этой оси вычисляется* $\vec{M}_0$. Пусть частица имеет импульс $\vec{p}$. Выберем систему координат так, чтобы частица находилась на оси x в точке x_0 и ее импульс $\vec{p} = p\vec{e}_y$. Возьмем на оси z произвольно точку O и точку O'. Вычислим для них $\vec{M}_0$ и $\vec{M}_{0'}$ и сравним их проекции M_{0z} и $M_{0'z}$ на ось z:



$$\vec{M}_0 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_0 & 0 & z_0 \\ 0 & p & 0 \end{vmatrix} = -\vec{e}_x z_0 p + \vec{e}_z x_0 p \Rightarrow M_{Oz} = x_0 p;$$

$$\vec{M}_{0'} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_0 & 0 & z_{0'} \\ 0 & p & 0 \end{vmatrix} = -\vec{e}_x z_{0'} p + \vec{e}_z x_0 p \Rightarrow M_{Oz} = x_0 p;$$

$$M_{Oz} = x_0 p \ = M_{Oz'}.$$

<u>Вопрос</u>. $M_{Ox} \neq M_{O'x}$, нет ли в этом противоречия?

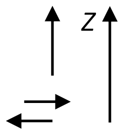
<u>Ответ</u>. Нет, так как точка O и $O' \notin$ *оси* x .

Таким образом, проекция $M_{oz} = const$ для любой точки $O \in z$.

Физический смысл момента импульса частицы относительно точки заключается в том, что он "отвечает" за поворот частицы относительно этой точки, а момент импульса относительно оси – за поворот частицы относительно этой оси. $\Rightarrow$

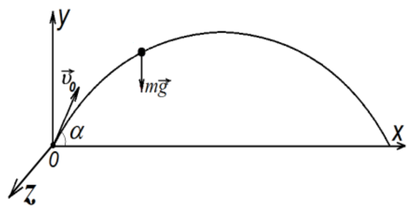
$\Rightarrow M_z = 0$:

1) при движении частицы параллельно оси;
2) если частица приближается или отдаляется от оси перпендикулярно к ней.



Из 1) и 2) следует, что $M_z = 0$, если импульс частицы $\vec{p}$ и ось лежат в одной плоскости.

И наоборот, $M_z \neq 0$, если ось z и прямая, проходящая через импульс $\vec{p}$, являются скрещивающимися прямыми.

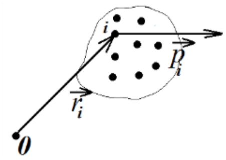


<u>Пример.</u>
Тело, брошенное под углом к горизонту.
<u>Вопрос.</u> Что можно сказать о M_x, M_y и M_z?

<u>Ответ.</u> $M_x = M_y = 0$, $M_z \cdot \vec{e}_z = \vec{M}$.

22. Момент импульса системы частиц относительно точки и относительно оси

1. <u>Момент импульса относительно точки</u>.

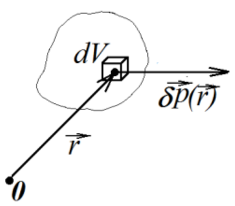


1) Для системы дискретных материальных точек.

Моментом импульса относительно точки O называется векторная сумма моментов импульсов частиц, входящих в систему, относительно точки O:

$$\vec{M}_0 \equiv \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{O_i}.$$

2) Для твердого тела:



$$d\vec{p}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) dV \vec{\upsilon};$$

$$d\vec{M}_o = [\vec{r}, \vec{\upsilon}] dV \rho(\vec{r}) \qquad \Rightarrow \vec{M}_0 = \int_V [\vec{r}, \rho(\vec{r}) \vec{\upsilon}] dV = \int_V \rho(\vec{r}) [\vec{r}, \vec{\upsilon}] dV.$$

2. Момент импульса относительно оси.

1) Для системы материальных точек.

Моментом импульса системы материальных точек относительно неподвижной оси z, проходящей через точку O, *называется проекция* $\vec{M}_O$ *на заданную ось.*

$$M_z = \sum_{i=1}^{N} M_{iz} = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i, \vec{p}_i]_z \leftarrow \textit{для дискретной системы материальных точек.}$$

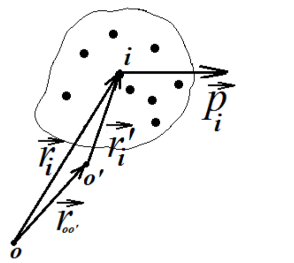
2) Для твёрдого тела.

Моментом импульса твёрдого тела относительно неподвижной оси z, проходящей через точку O, *называется проекция* $\vec{M}_0$ *на данную ось.*

$$M_z = \left[\int_V \rho(\vec{r})[\vec{r}, \vec{\upsilon}] dV \right]_z .$$

3. Связь между моментами импульса системы частиц (твёрдого тела), взятых относительно разных точек в данной системе отсчёта.

1) Для системы частиц:

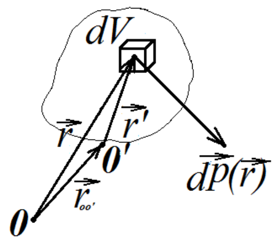


$$\vec{M}_0 = \sum_i [\vec{r}_i, m_i\vec{\upsilon}_i], \text{ где } \vec{r}_i = \vec{r}_i{}' + \vec{r}_{OO'};$$

$$\vec{M}_0 = \sum_i [\vec{r}_i{}' + \vec{r}_{OO'}, m_i\vec{\upsilon}_i] = \vec{M}_{O'} + [\vec{r}_{OO'}, \vec{p}].$$

Итак: $\vec{M}_0 = \vec{M}_{O'} + [\vec{r}_{OO'}, \vec{p}]$.

2) Для твёрдого тела:



$$\vec{M}_O = \int_V [\vec{r}\,' + \vec{r}_{OO'}, \rho dV \vec{\upsilon}] = \int_V [\vec{r}\,', \rho\vec{\upsilon}] dV + \left[\vec{r}_{OO'}, \int_V \rho\vec{\upsilon} dV \right].$$

Имеем то же, что и для системы частиц:

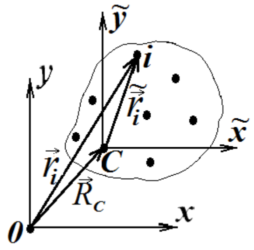
$$\vec{M}_0 = \vec{M}_{O'} + [\vec{r}_{OO'}, \vec{p}].$$

Если мы находимся в Ц-системе, то $\tilde{\vec{P}} = 0$ и для любой точки O и O' $\tilde{\vec{M}}_0 = \tilde{\vec{M}}_{O'}$, то есть *в Ц-системе момент импульса системы частиц или твёрдого тела одинаков относительно любой точки этой системы*:

$\tilde{\vec{M}}_0 = in\,\mathrm{var}$ *относительно положения точки* O.

23. Связь между моментами импульса в лабораторной и в Ц-системе

1) Для системы материальных точек $i = 1,2,3 \ldots N$:



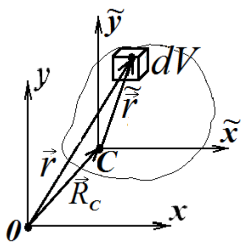
$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i, \vec{p}_i], \text{ где } \vec{r}_i = \tilde{\vec{r}}_i + \vec{R}_C \text{ и } \vec{p}_i = \tilde{\vec{p}}_i + m_i \vec{V}_C ;$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\tilde{\vec{r}}_i + \vec{R}_c \right), \left(\tilde{\vec{p}}_i + m_i \vec{V}_c \right) \right] = \sum_{i=1}^{N} \left[\tilde{\vec{r}}_i, \tilde{\vec{p}}_i \right] + \left[\vec{R}_c, \sum_i \tilde{\vec{p}}_i \right] + \left[\sum_i m_i \tilde{\vec{r}}_i, \vec{V}_c \right] + \left[\vec{R}_c, m\vec{V}_c \right] =$$

$$= \tilde{\vec{M}}_c + \left[\vec{R}_c, m\vec{V}_c \right], \text{ так как } \left[\vec{R}_c, \sum_i \tilde{\vec{p}}_i \right] = 0 \text{ и } \left[\sum_i m_i \tilde{\vec{r}}_i, \vec{V}_c \right] = 0 .$$

Вывод. $\vec{M}_0 = \tilde{\vec{M}}_c + \left[\vec{R}_c, m\vec{V}_c \right]$, *где* $\tilde{\vec{M}}_c$ *– момент импульса в Ц-системе относительно центра масс или другой точки в Ц-системе,* $m\vec{V}_c$ *– полный импульс в лабораторной системе,* $\vec{R}_c = \vec{R}_{oc}$ *– вектор, проведённый из точки* O *в точку* C.

2) Для твёрдого тела:



$$d\vec{M}_0 = \left[\left(\tilde{\vec{r}} + \vec{R}_c \right), \rho(\tilde{\vec{\upsilon}} + \vec{V}_c) \right] \cdot dV =$$
$$= \left[\tilde{\vec{r}}, \rho\tilde{\vec{\upsilon}} \right] dV + \left[\rho\tilde{\vec{r}}\, dV, \vec{V}_c \right] + \left[\vec{R}_c, \rho\tilde{\vec{\upsilon}} dV \right] + \left[\vec{R}_c, \vec{V}_c \right] \rho \cdot dV .$$

После интегрирования по dV получим

$$\vec{M}_O = \tilde{\vec{M}}_c + \left[\tilde{\vec{R}}_c, m\vec{V}_c \right] + \left[\vec{R}_c, \tilde{\vec{p}} \right] + \left[\vec{R}_c, \vec{V}_c \right] \cdot m \Rightarrow$$

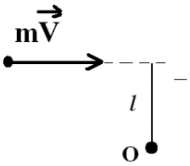
$$\vec{M}_0 = \tilde{\vec{M}}_c + \left[\vec{R}_c, m\vec{V}_c \right].$$

$\tilde{\vec{p}} = \int\limits_V \tilde{\vec{\upsilon}} \rho dV = 0$ – *полный импульс тела в Ц-системе.*

$\tilde{\vec{R}}_c = \dfrac{\int\limits_V \rho\tilde{\vec{r}}\, dV}{m} = 0$ – *положение центра масс в Ц-системе.*

$m = \int\limits_V \rho dV$ – *масса тела.*

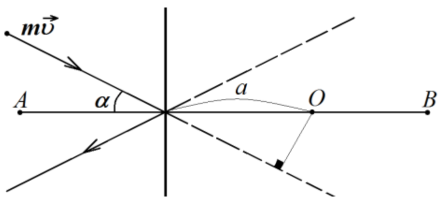
24. Качественные вопросы



1) Частица m движется со скоростью $\vec{\upsilon}$.
Найти ее момент импульса $\vec{M}_0$.

$\vec{M}_0 = m\upsilon l\vec{e}_{\otimes} = const$.

2) Частица m испытывает абсолютно упругий удар о стенку. Найти геометрическое место точек, относительно которых момент импульса частицы сохраняется.



Так как удар центральный, то

$$T = const = \frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} \Rightarrow |\vec{\upsilon}| = |\vec{\upsilon}_0| .$$

Для любой точки O на AB $\vec{M}_0 = m\upsilon a \sin\alpha \vec{e}_{\bullet}$ (до удара и после удара), $\Rightarrow$ $\vec{M}_0$ сохраняется.

3) Однородный обруч массы m и радиусом R вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$ в плоскости (x, y). Найти $\vec{M}_0,\ M_x,\ M_y,\ M_z$.

Введём массу единицы длины $m_1 = \dfrac{m}{2\pi R}$;

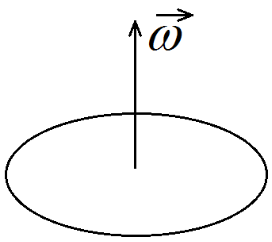
$dm = m_1 R d\varphi$ – это масса элемента длины $dl = Rd\varphi$.

Так как скорости всех элементов обруча принадлежат плоскости (x, y), то $M_x = M_y = 0$, $\Rightarrow$ $\vec{M}_0 = M_0\vec{e}_z$.

Момент импульса элемента длины:

$$d\vec{M}_0 = \left[R\cdot\vec{e}_r, \frac{m\cdot d\varphi}{2\pi} R\omega\cdot\vec{e}_\varphi \right] = \frac{m}{2\pi} R^2\omega\cdot d\varphi\cdot\vec{e}_z, \text{ причем } \left[\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\right] = \vec{e}_z .$$

После интегрирования по углу получаем

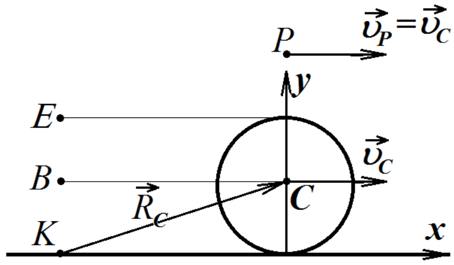


$$\vec{M}_0 = \int_0^{2\pi} \frac{m}{2\pi} R^2\omega\cdot d\varphi\cdot\vec{e}_z = mR^2\omega\cdot\vec{e}_z .$$

Как мы и предполагали, $M_x = M_y = 0$; $M_z = mR^2\omega$.

4) Обруч катится по дороге с $\upsilon = const$. Над ним летит птичка P со скоростью $\vec{\upsilon}$, на дороге лежит камень K, на кустике сидит бабочка B и висит ягода E.

Найти моменты импульса обруча $\vec{M}_P,\ \vec{M}_B,\ \vec{M}_K,\ \vec{M}_\varepsilon$ –?



Чтобы решить эту задачу, нужно использовать связь между моментами импульса твёрдого тела в лабораторной системе отсчёта и в Ц-системе, а также свойство инвариантности $\vec{M}_0$ в Ц-системе.

а) Проще всего установить момент импульса обруча относительно птички – точки P, так как она находится в Ц-системе обруча.

$\vec{M}_P = mR^2\omega\vec{e}_\otimes = m\upsilon R\cdot\vec{e}_\otimes = \tilde{\vec{M}}_C$ ($\vec{e}_\otimes$ – орт, направленный “в лист”).

б) Относительно камня – точки K:

$$\vec{M}_K = \tilde{\vec{M}}_C + \left[\vec{R}_{KC}, m\vec{V}_c\right] = m\upsilon R\cdot\vec{e}_\otimes + m\upsilon R\cdot\vec{e}_\otimes = 2m\upsilon R\cdot\vec{e}_\otimes.$$

в) Относительно бабочки – точки B:

$$\vec{M}_B = \tilde{\vec{M}}_C + \left[\vec{R}_{BC}, m\vec{V}_c\right] = \tilde{\vec{M}}_C,\ \text{так как}\ \vec{\upsilon}\uparrow\uparrow\vec{R}_{BC},\ \sin\alpha = 0.$$

г) Относительно ягоды – точки E:

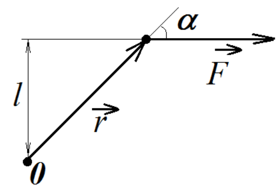
$$\vec{M}_E = \tilde{\vec{M}}_C + \left[\vec{R}_{\text{яс}}, m\vec{V}_c\right] = m\upsilon R\cdot\vec{e}_\otimes + m\upsilon R\cdot\vec{e}_\bullet = 0.$$

25. Момент силы, приложенной к частице, относительно точки и относительно оси

1. <u>Момент силы относительно точки.</u>

Опред. $\vec{N}_O = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]$ – *момент силы* $\vec{F}$ *относительно точки* O. *Кратчайшее расстояние от точки* O *до линии, вдоль которой действует сила (линии действия силы), называется плечом силы* l.

$$\left|\vec{N}_O\right| = rF\sin\alpha = Fl.$$



$\vec{N}_O$ *характеризует способность силы вращать частицу относительно точки* O.

$\vec{N}_O$ *перпендикулярен плоскости, содержащей* $\vec{r}$ и $\vec{F}$.

$\vec{N}_O$ – *псевдовектор.*

$\vec{N}_O = 0$, *если* $l = 0$, *то есть линия действия силы проходит через точку* O, что вполне естественно, так как в этом случае $\vec{F}$ способствует удалению или приближению частицы к точке O.

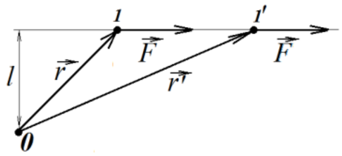
Если к материальной точке приложено несколько сил, то

$$\vec{N} = \sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}, \vec{F}_i\right] = \left[\vec{r}, \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\right] = \left[\vec{r}, \vec{F}\right],$$ *где* $\vec{F}$ *– равнодействующая всех сил.*

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x(yF_z - zF_y) + \vec{e}_y(zF_x - xF_z) + \vec{e}_z(xF_y - yF_x).$$

Момент силы $\vec{F}$ *относительно точки* O *не изменится, если частица (точка приложения силы) переместится вдоль линии действия силы* $\vec{F}$.

$$\vec{N}_{O1} = \vec{N}_{O1'} = Fl\vec{e}_{\otimes}.$$



2. Момент силы относительно оси.

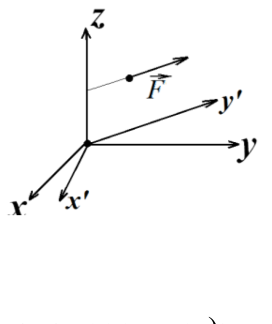
Опред. $N_z \equiv \left[\vec{r}, \vec{F}\right]_z = xF_y - yF_x$ *– характеризует способность силы вращать частицу вокруг оси z.*

Плечо силы относительно оси – кратчайшее расстояние между осью и линией действия силы.

Выясним, *когда сила не создаёт момента относительно оси z* $N_z = 0$:

1) $\vec{F}$ *параллельна оси z.*

2) *Линия действия силы пересекает ось.*



Пусть сила $\vec{F}$ пересекает ось z своим продолжением и $\vec{F} \perp x'$. Точка приложения силы в системе координат (x', y', z') принадлежит плоскости (y', z). Очевидно, что сила $\vec{F} = F_z\vec{e}_z + F_{y'}\vec{e}_{y'}$ может только двигать частицу вдоль оси z за счёт F_z и удалять от оси z за счёт $F_{y'}$, но не вращает частицу вокруг оси z.

Подтвердим наши умозаключения аналитически (в цилиндрической системе координат):

$$N_z = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]_z = \left[\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z, \vec{F}_\perp + \vec{F}_z\right]_z = \left\{\left[\rho\vec{e}_\rho, \vec{F}_z\right] + \left[z\vec{e}_z, \vec{F}_z\right] + \left[\rho\vec{e}_\rho, \vec{F}_\perp\right] + \left[z\vec{e}_z, \vec{F}_\perp\right]\right\}_z =$$

$= \left[\rho\vec{e}_\rho, F_\rho\vec{e}_\rho + F_\varphi\vec{e}_\varphi\right] = \rho F_\varphi$ – вращательный момент относительно оси z создает φ-ая компонента силы в цилиндрической системе координат. В данном рассмотренном нами случае эта компонента силы отсутствует. Следовательно, N_z =0.

Выводы.

1. Компоненты силы, которые лежат в одной плоскости с осью, не создают момента относительно этой оси.

2. $N_z = \rho F_\varphi = lF_\perp$, где l *– кратчайшее расстояние между осью и линией действия силы.*

Существуют два способа вычисления момента силы N_z*:*

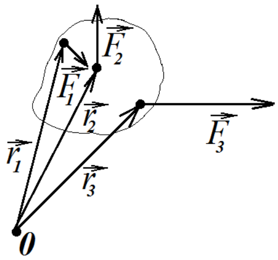
1) Можно брать произведение расстояния ρ *от оси z до точки приложения силы на компоненту силы, перпендикулярную* $\vec{\rho}$ *.*

2) *Можно брать произведение плеча силы* l*, то есть кратчайшего расстояния между осью и линией действия силы, на перпендикулярную к оси компоненту силы* $F_\perp$ *.*

26. Момент сил, приложенных к системе частиц и твёрдому телу, относительно точки и относительно оси

1. Момент сил относительно точки.

Пример.



$$\vec{N} \equiv \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right]$$

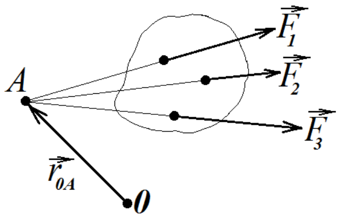
В данном случае:

$$\underbrace{\otimes \vec{N}_1 \quad \odot \vec{N}_2 \quad \otimes \vec{N}_3}_{N_{Z.}}$$

Если линии действия сил пересекаются в одной точке A*, то* $\vec{N}_O$ *равен моменту равнодействующей всех сил, перенесённых в точку* A *.*

$$\vec{N}_O = \sum_i \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right] = \left[\vec{r}_{OA}, \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i\right] = \left[\vec{r}_{OA}, \vec{F}\right]$$

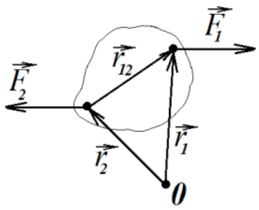
Здесь $\vec{F}$ – равнодействующая всех сил.



2. Пара сил.

Парой сил называются две равные и противоположно направленные силы.

Момент пары сил равен моменту одной из этих сил относительно точки приложения другой силы.



$$\vec{N}_o = \left[\vec{r}_1, \vec{F}_1\right] + \left[\vec{r}_2, \vec{F}_2\right] = = \left[\vec{r}_1, \vec{F}_1\right] + \left[\vec{r}_{12} - \vec{r}_1, \vec{F}_1\right] = \left[\vec{r}_{12}, \vec{F}_1\right];$$

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1; \;\; \vec{r}_2 = \vec{r}_1 - \vec{r}_{12}.$$

Если пара сил действует вдоль одной прямой, то её момент $\vec{N} = 0$, так как $\vec{r}_{12} \uparrow\uparrow \vec{F}_1 \uparrow\uparrow \vec{F}_2$.

3. Если существует система, состоящая из взаимодействующих частиц и подверженная воздействию внешних сил $\vec{F}_k = 1,2,3,...,K$, то внутренние силы $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ и действуют вдоль одной и той же прямой, параллельной $\vec{r}_{ij}$ $\Rightarrow$ *внутренние силы момента не создают* $\Rightarrow$

$\vec{N} = \sum_{k=1}^{K} [\vec{r}_k, \vec{F}_k]$, *где* $\vec{F}_k$ *– внешние силы, действующие на систему.*

4. *Чтобы найти момент сил* N_z, *действующих на систему относительно оси z, достаточно найти z-проекцию момента сил относительно любой точки O, принадлежащей этой оси z.*

27. Закон сохранения момента импульса

1. Для одной частицы:

$$\vec{M}_0 = [\vec{r}\vec{p}] \quad \Big| \quad \frac{d}{dt};$$

$$\frac{d\vec{M}_0}{dt} = \underbrace{\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right]}_{0} + \underbrace{\left[\vec{r}\,\frac{d\vec{p}}{dt}\right]}_{\vec{F}} = \vec{N}_0.$$

0, так как $\vec{\upsilon} \| \vec{p}$ $\vec{F}$ – равнодействующая всех сил, действующих на частицу.

$\frac{d\vec{M}_0}{dt} = \vec{N}_0$ *– верен относительно любой точки инерциальной системы отсчёта,* то есть там, где верен II закон Ньютона.

Закон сохранения момента импульса $\Rightarrow \vec{M}_0 = const$, *если*

1) $\vec{F}_{внешн.} = 0$ *(равнодействующая всех сил =0);*

2) $\vec{N}_0 = 0,$ *то есть сила центральная;*

2а) $N_z = 0 \Rightarrow M_z = const$ *(линия действия силы пересекает ось или параллельна оси, то есть сила и ось принадлежат одной плоскости).*

2. Для системы частиц:

$$\frac{d\vec{M}_{oi}}{dt} = \vec{N}_{oi}.$$

После суммирования по всем частицам системы $\frac{d\vec{M}_0}{dt} = \vec{N}_{0_{\text{внешних сил}}}$.

В инерциальных системах отсчёта закон сохранения момента импульса является следствием изотропии пространства.

Этот закон справедлив и для твёрдого тела.

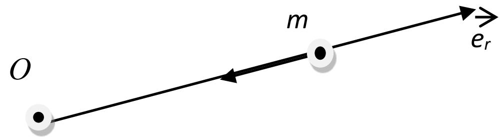
Вывод. $\vec{M}_0 = const$, *если*

1) система замкнута $\Rightarrow \vec{F}_{внешн.} = 0$. *В любых инерциальных системах отсчёта момент импульса* *замкнутой* *системы* $\vec{M}_0 = const$;

2) *суммарный момент внешних сил равен нулю* $\sum_i \vec{N}_{0i} = 0$.

28. Движение в центральном поле сил

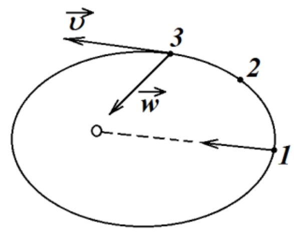
1. Рассмотрим материальную точку, на которую действует сила $\vec{F} = f(r)\vec{e}_r$.
Пусть точка O – центр поля.
При этом $\begin{cases} f(r)>0 \text{ – отталкивание от центра;} \\ f(r)<0 \text{ – притяжение к центру.} \end{cases}$



$\vec{N}_0 = 0 = [\vec{r}\vec{F}] = \dfrac{d\vec{M}_0}{dt} \Rightarrow \vec{M}_0 = const$, значит, траектория движения частицы в центральном поле плоская.

I закон Кеплера: Любая планета движется по эллипсу, в фокусе которого находится Солнце.

Вопрос. Что можно сказать о $\dfrac{d\upsilon}{dt}$ в точках 1, 2, 3?



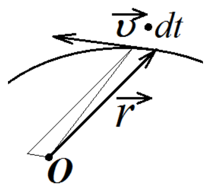
Ответ. В точке 1 $\vec{w}_\tau \uparrow\downarrow \vec{\upsilon} \Rightarrow \dfrac{d\upsilon}{dt} < 0$ – замедленное движение;

в точках 2 и 3 $\dfrac{d\upsilon}{dt} > 0$ – ускоренное движение.

Те же заключения можно сделать из рассмотрения момента импульса планеты относительно центра поля точки O $|\vec{M}_o| = const$.

В т.1 $r\uparrow \Rightarrow \upsilon\downarrow$, в т.3 $r\downarrow \Rightarrow \upsilon\uparrow$.

$ds = \dfrac{1}{2}\left|[\vec{r}, \vec{\upsilon}dt]\right| = \dfrac{1}{2}\left|[\vec{r}\,\vec{\upsilon}]\right| = \dfrac{1}{2}S$ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{r}, \vec{\upsilon}dt$.



$\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{|\vec{M}_0|}{2m} \Rightarrow$ *секторальная скорость частицы в центральном поле постоянна.*

Это II закон Кеплера:
Радиус-вектор планеты в равные времена описывает равные площади.

Во времена Кеплера не было понятия момента импульса, но по сути это закон сохранения момента импульса частицы $\vec{M}_0$ в центральном поле.

<u>Вывод.</u> *При движении в центральном поле у частицы сохраняется:*
1) момент импульса относительно центра поля
$\vec{M}_0 = const \Rightarrow M_z = const$, $z \perp$ *плоскости движения;*

1а) секторальная скорость $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{M_0}{2m} = const$;

2) полная механическая энергия $E = \dfrac{m\upsilon^2}{2} \underbrace{- \int f(r)\vec{e}_r d\vec{r}}_{U(r)}$.

2. Частный случай центрального поля
$\vec{f}(r) = \dfrac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 0 & \text{– отталкивание (кулоновское поле одноимённых зарядов);} \\ \alpha < 0 & \text{– притяжение (гравитационное поле, кулоновское поле} \end{cases}$
разноимённых зарядов).

$$U = -\int f(r)\vec{e}_r d\vec{r} = -\int \frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r(d\vec{r}\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi) = +\frac{\alpha}{r} + C;$$

$U(\infty) = 0 \Rightarrow C = 0,$
то есть зануляем потенциальную энергию на ∞.

$U = \dfrac{\alpha}{r}$ – потенциальная энергия частицы.

$E_0 = \dfrac{m\upsilon^2}{2} + \dfrac{\alpha}{r} = const$ – полная механическая энергия частицы.

Так как движение плоское, то наиболее удобна цилиндрическая система координат с осью *z*, проходящей через центр поля и перпендикулярной плоскости движения частицы.

$$M_{0z} = [\vec{r}, m\vec{\upsilon}]_z;$$
$$\vec{\upsilon} = \upsilon_\varphi\vec{e}_\varphi + \upsilon_r\vec{e}_r = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d(\vec{e}_r)}{dt} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi;$$
$$d\vec{e}_r = 1 \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi;$$
$$M_{oz} = \left[r\vec{e}_r, r\vec{e}_r + r\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \right]_z m = r^2\dot{\varphi}\,m = const.$$

Используя законы сохранения энергии и момента импульса относительно оси вращения, получаем систему из двух уравнений:

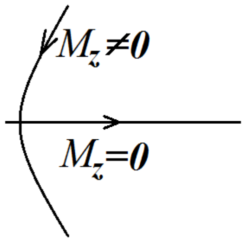
$$\begin{cases} E = \dfrac{m\upsilon^2}{2} + \dfrac{\alpha}{r} = \dfrac{m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}{2} + \dfrac{\alpha}{r} = E_0; \\ mr^2\dot{\varphi} = M_z. \end{cases}$$

Эта система уравнений, где M_z, E_0 =*const*, полностью задает траекторию движения частицы в центральном поле вида $U = \dfrac{\alpha}{r}$. После подстановки

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z}{mr^2} \Rightarrow \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{(M_z)^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r} = E_0 \leftarrow$$ получаем уравнение для нахождения *r*.

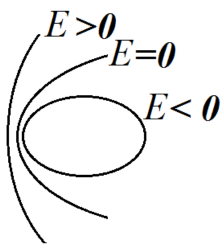
Это уравнение полностью описывает траекторию движения частицы в центральном поле с $E_0 = const$ и $M_z = const$. Оно является нелинейным дифференциальным уравнением 1-го порядка, решения которого представляют собой конические сечения. В зависимости от M_z и E_0 частицы траекторией ее движения в центральном поле является одно из конических сечений, а именно эллипс, окружность, гипербола или парабола. Исследуем эти траектории в зависимости от знака α.

1) $\alpha > 0$ – отталкивание $\Rightarrow$ E_0 всегда >0.



Если $M_z = 0$, то траекторией движения является прямая, если $M_z \neq 0$ – гипербола.

2) $\alpha < 0$ – притяжение $\Rightarrow$



1. $E_0 > 0$ гипербола.

2. $E = 0$ парабола (II космическая скорость).

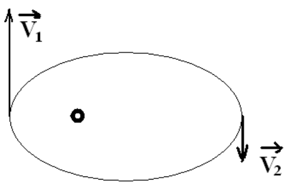
3. $E < 0$ – эллипс, частица не может преодолеть потенциальное поле $|U| > T$.

3а. $E = -\dfrac{m\alpha^2}{2M^2}$ – окружность с радиусом $R = \dfrac{M_z^{\;2}}{|\alpha| m}$, так как при этом $\dfrac{d\dot{r}}{dt} = 0$.

29. Задачи

1. Спутник движется по эллиптической орбите вокруг планеты С.

Написать соотношение, связывающее υ_1 и υ_2 в точках max и min удаления – апогея и перигея, зная параметры орбиты:



$$\begin{cases} \langle r \rangle = 149{,}5 \times 10^9 \, м \\ \dfrac{r_{\max}}{r_{\min}} = 1{,}04; \dfrac{r_{\max}}{\langle r \rangle} \approx 1{,}02; \dfrac{r_{\min}}{\langle r \rangle} \approx 0{,}98. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} \dfrac{m\upsilon_1^2}{2} - \dfrac{\alpha}{r_1} = \dfrac{m\upsilon_2^2}{2} - \dfrac{\alpha}{r_2} \\ m\,\upsilon_1 r_1 = m\,\upsilon_2 r_2 \end{cases}, \text{ где } \begin{cases} \alpha = \gamma m_3 M_c \\ M_c = 2 \times 10^{30} кг \\ \gamma = 6{,}7 \times 10^{-11} \dfrac{м^3}{кг \times c^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \upsilon_{\max} = \sqrt{\dfrac{2\gamma M_c}{r_{\max}+r_{\min}}}\sqrt{\dfrac{r_{\max}}{r_{\min}}} = \sqrt{\dfrac{\gamma M_c}{\langle r\rangle}}\sqrt{\dfrac{r_{\max}}{r_{\min}}} = 30{,}4\dfrac{км}{с}; \\ \upsilon_{\min} = \sqrt{\dfrac{\gamma M_c}{\langle r\rangle}}\sqrt{\dfrac{r_{\min}}{r_{\max}}} = 29{,}2\dfrac{км}{с}. \end{cases}$$

К сведению, скорость движения Солнечной системы вокруг центра Галактики $\upsilon_{солн.сист.} \approx 250 \,{}^{км}\!/_{с}$ с периодом обращения $T \approx 200$ млн лет.

Скорость вращения Земли на нашей широте легко оценить:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha = 90 - 56 = 34^0 \approx \frac{\pi}{6}, \;\; R_з = 6{,}4\cdot 10^3 \,{}^{км}\!/_{с}, \;\; \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon = \omega \cdot R_з \cdot \sin\theta = \frac{6{,}4\cdot 10^{-3}}{2}\cdot\frac{2\pi}{24\cdot 3{,}6\cdot 10^3} \approx 0{,}3 \,{}^{км}\!/_{с}.$$

2. Частица рассеивается на неподвижном кулоновском центре, помещённом в точку O, имея на ∞ υ_∞. Прицельный параметр траектории b. Сравнить υ_0 – скорость в точке максимального сближения – с υ_∞ и изобразить траекторию движения частицы в случаях:

а) притяжения;

б) отталкивания.

<u>Решение.</u>

$$M_0 = const \Rightarrow \upsilon_0 r_{\min} = b\upsilon_\infty \Rightarrow \upsilon_0 = \frac{b}{r_{\min}}\upsilon_\infty \Rightarrow$$

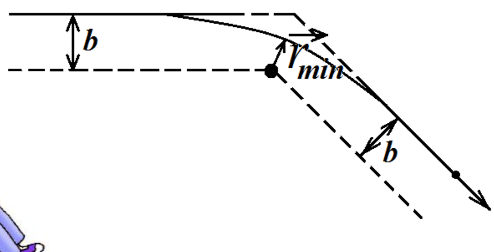
1) $\upsilon_{0_a} > \upsilon_\infty$, *т. к.* $r_{\min} < b$ – *притяжение*;

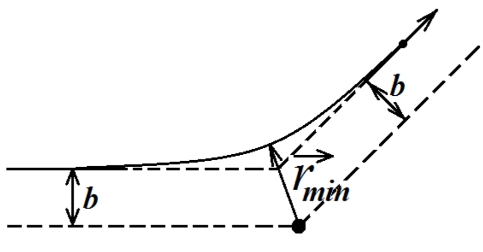
2) $\upsilon_{0_a} < \upsilon_\infty$, *т. к.* $r_{\min} > b$ – *отталкивание.*

$$\frac{m\upsilon_\infty^2}{2} = \frac{m\upsilon_0^2}{2} \mp \frac{\alpha}{r_{\min}}$$ («–» в случае притяжения, «+» – отталкивания).

Так как центральное поле консервативно, то $E=const$, и, когда частица улетит на ∞, она будет иметь скорость υ_∞ такую же, как в начале своего движения, а так как $\vec{M}_0 = const$, то прицельный параметр тоже не может измениться. Угол рассеивания зависит от величины υ_∞ и прицельного параметра b. Очевидно, что: чем больше υ_∞ и b, тем меньше угол рассеивания φ_0:

$$\sin\frac{\varphi_0}{2} = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{bm\upsilon_\infty^2}\right)^2 + 1} \mp \frac{|\alpha|}{bm\upsilon_\infty^2}$$ («+» в случае притяжения, «–» – отталкивания).





II.3. Неинерциальные системы отсчёта

1. Суть вопроса. Постановка задачи

Законы Ньютона выполняются в инерциальных системах отсчёта, то есть в тех, которые движутся с $\vec{\upsilon} = const$ относительно гелиоцентрической системы.

Наша задача – установить законы преобразования сил и ускорений при переходе от инерциальной в неинерциальную систему, то есть сформулировать динамическое уравнение в неинерциальных системах отсчёта.

1. Ограничиваясь нерелятивистским рассмотрением, будем считать, что пространственные и временные промежутки инвариантны при переходе от одной системы координат к любой другой, произвольно движущейся. Это справедливо для $\upsilon << c$. Следовательно, считаем, что все скорости, в том числе и относительные скорости самих систем, много меньше скорости света c.

2. Ограничимся рассмотрением динамики материальной точки.

Забегая вперёд, отметим, что мы должны будем получить динамическое уравнение материальной точки в неинерциальной системе в следующем виде:

$$m\vec{w} = \vec{F}_{внеш} + \left(-m\vec{a}\right) + m\omega^2\vec{R} + 2m\left[\vec{\upsilon}'\vec{\omega}\right] + m\left[\vec{r}'\vec{\beta}\right],$$

где $\vec{a}$ *– ускорение поступательного движения системы;*

$\vec{\omega}$ *– угловая скорость вращения системы;*

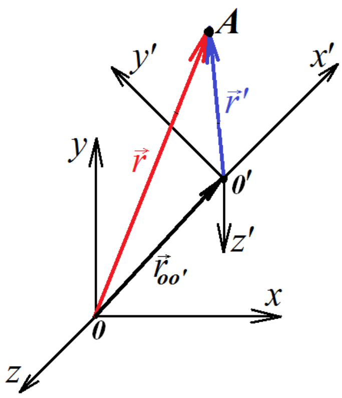
$\vec{\beta}$ *– угловое ускорение вращения системы;*

$\vec{r}'$, $\vec{\upsilon}'$ *– радиус-вектор и скорость материальной точки в неинерциальной системе;*

$\vec{R}$ *– расстояние материальной точки от оси вращения системы.*

2. Поступательное движение неинерциальной системы. Поступательная сила инерции

Пусть K'-система движется относительно K-системы с ускорением $\vec{a}$. Тогда радиус-вектор, скорость и ускорение точки A в этих системах будут иметь следующую взаимосвязь:



$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{OO'}$,

$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{\upsilon}_{O'}$,

$\vec{w} = \vec{w}' + \vec{a}$, где $\vec{a}$ – ускорение системы.

Для материальной точки в инерциальной системе:

$m\vec{w} = \vec{F} = m\left(\vec{w}' + \vec{a}\right) \Rightarrow$

$m\vec{w}' = \vec{F} + \left(-m\vec{a}\right)$ *– динамическое уравнение материальной точки* m *в системе, движущейся с ускорением* $\vec{a}$ *относительно инерциальной системы.*

$-m\vec{a} = \vec{F}_{in}$ *– поступательная сила инерции.*

Отличия $\vec{F}_{in}$ (любой силы инерции) от сил взаимодействия тел:

1) $\vec{F}_{in}$ не есть результат взаимодействия тел $\Rightarrow$ не работает III закон Ньютона (не на кого жаловаться и некому дать сдачи);

2) $\vec{F}_{in}$ не инвариантна относительно перехода в другую систему отсчёта.

Вопрос. Являются ли силы инерции реальными или фиктивными в смысле их действия на тело?

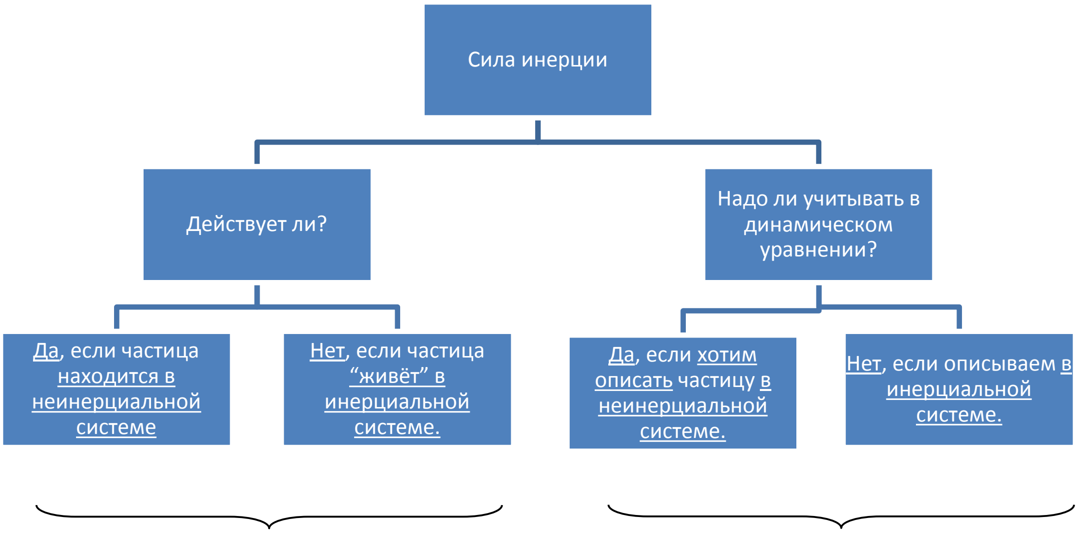
<u>Ответ.</u> Если придерживаться ньютоновской механики, согласно которой все реальные силы являются результатом взаимодействия тел, $\vec{F}_{in}$ фиктивны, но это не значит, что силы инерции несуществующие.

<u>Вопрос.</u> Надо ли принимать их во внимание и учитывать при написании динамического уравнения частицы?

Ответ не однозначен.

– Да, если рассматриваем частицу в неинерциальной системе.

– Нет, если рассматриваем в инерциальной системе.



Независимо от нашего описания

Независимо от реального положения частицы (реальной её принадлежности к инерциальной или неинерциальной системе)

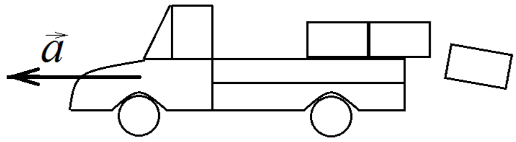
Внутренних противоречий здесь нет, так как если считать, что все взаимодействия осуществляются посредством силовых полей, то на силы инерции можно смотреть как на действия, которым подвергаются тела со стороны реального поля неинерциальной системы. Это поле определенным образом преобразуется при переходе из одной движущейся системы в другую. Ведь и электромагнитные силы тоже преобразуются при переходе из одной системы в другую, даже между инерциальными системами, и также могут исчезать. Например, два заряда, движущиеся параллельно друг другу с равными скоростями, взаимодействуют с силой

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}\vec{e}_r + q\left[\vec{\upsilon}\vec{B}\right],$$

где $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}\vec{e}_r$ – электрическая и $q\left[\vec{\upsilon}\vec{B}\right]$ – магнитная составляющие. Если перейти в систему, движущуюся с $\vec{\upsilon}$, то магнитная сила исчезнет. Относительность сил инерции в философском плане пытался устранить *Эйнштейн*, предположив, что никакими физическими опытами невозможно отличить однородное поле тяготения от однородного поля сил инерции. Это *принцип эквивалентности, который является краеугольным камнем общей теории относительности (ОТО): все физические явления в однородном поле тяготения происходят совершенно так же, как и в соответствующем однородном поле сил инерции.* (СТО – специальная теория относительности или, точнее, частная, когда $\vec{a} = 0$.)

<u>Вывод:</u> под фиктивностью сил инерции понимается их отсутствие в инерциальных системах. Независимо от точки зрения на термин "реальные" силы, применительно к силам инерции существует ряд явлений, которые интерпретируются как проявление сил инерции (торможение

поезда, перегрузки в ракете, маятник на тележке, грузы, падающие с грузовика, подмытые правые берега рек в Северном полушарии и т. д.).

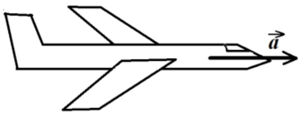


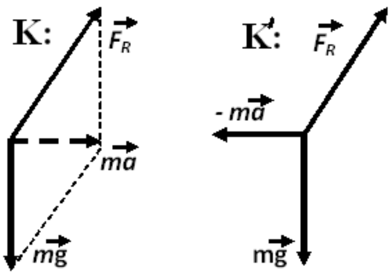
Пример: выдёргивание тележки из-под тяжёлого груза.

Мораль: если вещи начинают бегать и прыгать “сами собой”, то причина тому – действие неинерциальной системы с $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}$.

Наша задача – научиться писать II закон Ньютона (а точнее, динамическое уравнение) как в инерциальной K-, так и в неинерциальной K'-системе и изображать векторную диаграмму действующих на частицу сил.

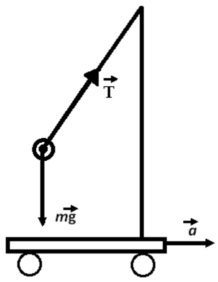
1) Для тела, лежащего на полу в самолете.





K: $\quad m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_R$;

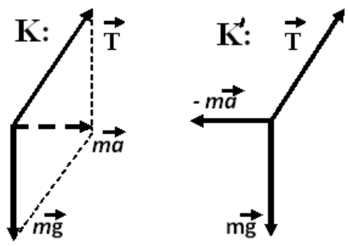
K': $\quad 0 = m\vec{g} + \vec{F}_R - m\vec{a}$.



2) Тело на подвесе.

а) Тележка движется горизонтально.

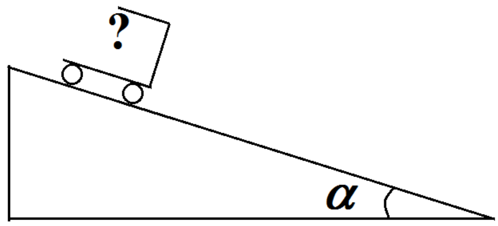
$$K':\quad \begin{array}{l} 0 = m\vec{g} + \vec{T} - m\vec{a} \\ T = \sqrt{a^2 + g^2} \cdot m \end{array}.$$



$$K:\quad \begin{array}{l} m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} \\ tg\alpha = \dfrac{a}{g} \end{array}.$$

б) Как будет вести себя шарик на подвесе, находящемся на тележке, съезжающей с наклонной плоскости, если относительно тележки шарик покоится?

K': $0 = m_1\vec{g} + \vec{T} - m_1\vec{a}$.



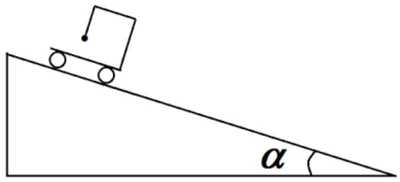
Ускорение тележки при условии $m_1 << M'$:

$$\vec{a} = \frac{(M+4m)\sin\alpha \cdot g\vec{e}_x}{(M+4m) + 4\dfrac{mR^2}{2R^2}} = \frac{g\sin\alpha \cdot \vec{e}_x}{1 + \dfrac{2m}{M+4m}} < g\sin\alpha \cdot \vec{e}_x .$$

Здесь $M + 4m = M'$ – масса тележки с шариком и колёсами, m – масса колеса, ось x направлена вниз по наклонной плоскости. Рассмотрим два предельных случая.

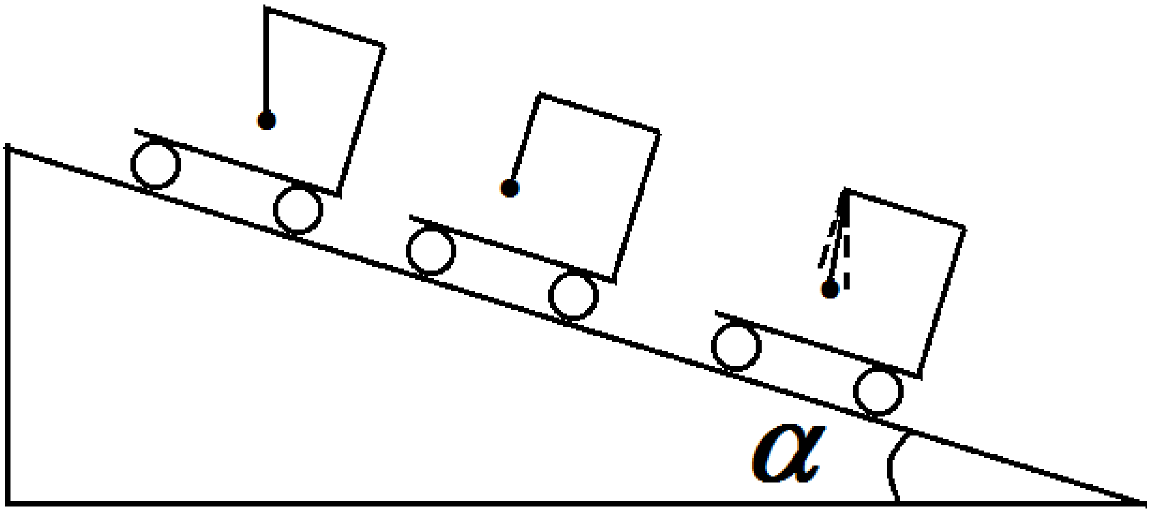
1. Тяжёлая тележка с лёгкими колёсами $M' >> 2m$:

ускорение $\vec{a} \approx g\sin\alpha \cdot \vec{e}_x$ и $\vec{T} \perp \vec{e}_x$, то есть подвес перпендикулярен наклонной плоскости.



2. Лёгкая тележка и шарик, но тяжелые колёса $M' \approx 4m$:

$\vec{a} \approx \dfrac{2g\sin\alpha}{3}\vec{e}_x$ и $\vec{T} = m_1\left(\dfrac{2}{3}g\sin\alpha \cdot \vec{e}_x - \vec{g}\right)$, то есть нить отклоняется от вертикали к наклонной плоскости по ходу движения.



<u>В состоянии покоя:</u>

шарик игнорирует наклонную плоскость, “зная” только про Землю.

<u>Катящаяся тяжёлая тележка:</u>

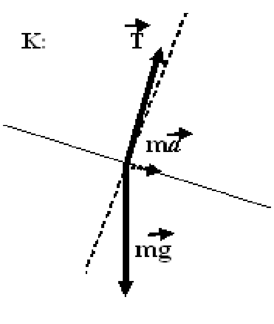
шарик “не знает”, что дело происходит на наклонной к Земле плоскости – шарик игнорирует Землю.

<u>Катящаяся лёгкая тележка:</u>

шарик “бежит впереди паровоза”, но “знает” и про Землю, и про наклонную плоскость.

K:

$$\begin{cases} m_1\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} \\ \vec{a} = \dfrac{g\sin\alpha}{1 + \dfrac{2m}{M+4m}}\vec{e}_x. \end{cases}$$



Выводы. На примере систем, двигающихся поступательно, легко выработать общее отношение к неинерциальным системам и к динамическим уравнениям, а именно:

1) То, в какой системе находится тело, от нас не зависит – это объективная реальность.

2) В зависимости от того, что требуется узнать, мы можем работать в инерциальной и неинерциальной системах, и этот выбор зависит только от нас (а частице безразлично, из какой точки пространства мы решили её разглядывать).

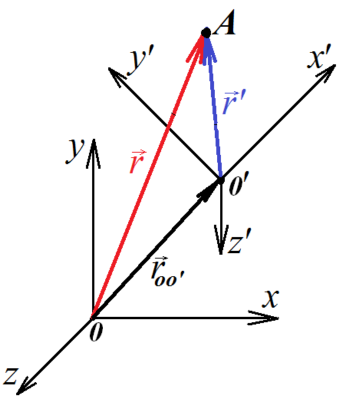
3) Если нас интересует ускорение частицы в инерциальной системе $\vec{w}$ или силы её взаимодействия с другими телами, мы можем работать в инерциальной системе, но тогда должны забыть о силах инерции (независимо от того, в какой системе реально "живёт" тело).

4) Если нас интересует $\vec{w}'$ и поведение тела в неинерциальной системе, нужно учитывать силы инерции (независимо от того, действуют они на самом деле на тело или нет).

Мораль. Что заложите, то и получите:

- учтёте силы взаимодействия с телами и силы инерции $\Rightarrow$ получите $\vec{w}'$;
- учтёте только силы взаимодействия с телами $\Rightarrow$ получите $\vec{w}$.

3. Силы инерции при произвольном (непрямолинейном) ускоренном движении системы отсчёта



Пусть K'-система движется произвольным образом относительно K-системы (K – инерциальная система).

Тогда на основании наших познаний в кинематике движение материальной точки A в K'-системе можно разложить на сумму поступательного движения вместе с точкой O' (начало координат K'-системы) и вращения относительно точки O':

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_{OO'},$$

$$\vec{r}\,' = x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'} + z'\vec{e}_{z'}.$$

Когда мы будем интересоваться поворотом K'-системы относительно точки O', то нам потребуется:
$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{e}_{x'}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{e}_{x'}]\,; \\ \dfrac{d\vec{e}_{y'}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{e}_{y'}]\,; \\ \dfrac{d\vec{e}_{z'}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{e}_{z'}]\,. \end{cases}$$

Это обычный закон преобразования векторов при вращении.

Выразим скорость точки A через ее координаты и скорость в K'-системе:

$$\vec{\upsilon}_A = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{OO'}}{dt} + \left\{\frac{dx'}{dt}\vec{e}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{e}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\vec{e}_{z'}\right\} + \left\{x'[\vec{\omega}, \vec{e}_{x'}] + y'[\vec{\omega}, \vec{e}_{y'}] + z'[\vec{\omega}, \vec{e}_{z'}]\right\} =$$
$$= \vec{\upsilon}_{O'} + \vec{\upsilon}\,' + [\vec{\omega}, x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'} + z'\vec{e}_{z'}] = \vec{\upsilon}_{O'} + \vec{\upsilon}\,' + [\vec{\omega}, \vec{r}\,'].$$

Здесь $\vec{\upsilon}\,'$ – скорость точки A в K'-системе,

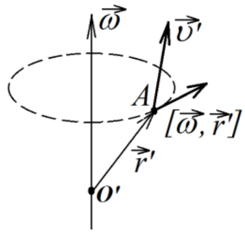
$[\vec{\omega}, \vec{r}\,']$ – скорость, обусловленная вращением самой K'-системы.

Вспомним формулу для скорости любой точки A при плоском движении твердого тела:

$$\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_{O'} + \left[\vec{\omega}, \vec{r}_{O'A}\right]. \qquad (1)$$

Вопрос. Почему в данном случае возникло дополнительное слагаемое $\vec{\upsilon}'$?

Ответ. Так как формула (1) верна для кинематики твёрдого тела, в котором точка A жёстко связана с точкой O', а в данном случае $\vec{\upsilon}'$ – это собственная скорость точки A относительно O', и жёсткой связи нет.



Как показано на рисунке, $\vec{\upsilon}'$ отвечает за самостоятельное движение т. A относительно точки O'; $\left[\vec{\omega}, \vec{r}'\right]$ направлена по касательной к пунктирной линии и отвечает за поворот системы K' относительно частицы.

Продифференцируем скорость точки A по времени, чтобы найти ее ускорение в K-системе (в дальнейшем индекс A у скорости и ускорения будем опускать):

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\vec{\upsilon}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{\upsilon}'}{dt} + \frac{d}{dt}\left[\vec{\omega}, \vec{r}'\right]. \qquad (2)$$

$$\frac{d\vec{\upsilon}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\upsilon_{x'}\vec{e}_{x'} + \upsilon_{y'}\vec{e}_{y'} + \upsilon_{z'}\vec{e}_{z'}\right) = \vec{w}' + \left[\vec{\omega}, \vec{\upsilon}'\right],$$

где $\left[\vec{\omega}, \vec{\upsilon}'\right]$ – добавка, связанная с поворотом самой системы относительно частицы.

$d\vec{r}' = \vec{\upsilon}' dt + \left[\vec{\omega} dt, \vec{r}'\right]$, где $\vec{\omega} dt = d\vec{\varphi}$;

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{\upsilon}' + \left[\vec{\omega}, \vec{r}'\right] = \vec{\upsilon}' + \left[\vec{\omega}, \vec{R}'\right], \quad т.\ к.\ \vec{r}' = \vec{R}' + \vec{r}'_{\uparrow\uparrow}.$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{\omega}, \vec{r}'\right] = \left[\vec{\beta}', \vec{r}'\right] + \left[\vec{\omega}, \left[\vec{\omega}, \vec{r}'\right]\right] + \left[\vec{\omega}, \vec{\upsilon}'\right] = \left[\vec{\beta}', \vec{r}'\right] - \vec{R}'\omega^2 + \left[\vec{\omega}, \vec{\upsilon}'\right].$$

Подставляя полученные выражения в (2), получим связь ускорений в K- и K'-системе:

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{w}_{O'} + \vec{w}' + 2\cdot\left[\vec{\omega}, \vec{\upsilon}'\right] + \left[\vec{\beta}, \vec{r}'\right] - \vec{R}'\omega^2 = \vec{w}.$$

$$m\vec{w} = \vec{F} = m\vec{w}_{O'} + m\vec{w}' + 2\cdot\left[\vec{\omega}, \vec{\upsilon}'\right]m + \left[\vec{\beta}, \vec{r}'\right]m - \vec{R}'\omega^2 m \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad m\vec{w}' = \vec{F} + \left(-m\vec{w}_{O'}\right) + 2\cdot\left[\vec{\upsilon}', \vec{\omega}\right]m + \left[\vec{r}', \vec{\beta}\right]m + \vec{R}'\omega^2 m$ – *динамическое уравнение в неинерциальной системе.*

Поговорим детально о дополнительно возникших силах инерции:

- $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}$ *– поступательная сила инерции, однородна, консервативна* $\Rightarrow$ *можно говорить о потенциальном поле этой силы (это и сделал Эйнштейн);*

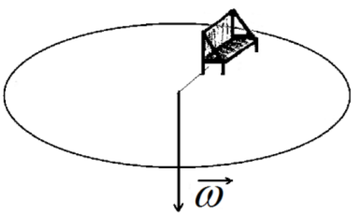
- $\vec{F}_{ц.\ б.} = -m\omega^2\vec{R}'$ *– центробежная сила инерции, центральная, консервативная* $\Rightarrow$ *можно говорить о потенциальном поле центробежной силы;*

- $\vec{F}_{in} = m\left[\vec{r}', \vec{\beta}\right]$ *– сила инерции, связанная с неравномерностью вращения системы;*

- $\vec{F}_{кор} = 2m\left[\vec{\upsilon}', \vec{\omega}\right]$ *– кориолисова сила инерции однородная, неконсервативная, гироскопическая, связана с относительным движением тела в K'-системе.*

Название силы	Обознач.	Где и на что действует	Направление	Особые приметы и чем обусловлена	Работа
Поступательная сила инерции	$-m\vec{a}$	На любое тело в поступат. ускоряющ. системе	Против ускорения системы $-\vec{a}$	Однородна, консервативна, существует из-за неизотропности пространства	$\vec{\upsilon}'_{тела} \uparrow\uparrow \vec{a} \to A<0$ $A=-m\vec{a}\vec{l}\,'$ $\vec{\upsilon}'_{тела} \uparrow\downarrow \vec{a} \to A>0$ $\upsilon'_{тела}=0 \to A=0$
Центробежная сила инерции	$m\omega^2\vec{R}'$	На любое тело во вращающ. системе отсчёта	От оси вращения	Центральная, консервативная, $U=-\dfrac{m\omega^2 R'^2}{2}$. Из-за неоднородности пространства	$A_{12}=U_1-U_2=$ $=\dfrac{m\omega^2}{2}\left(R_2'^2-R_1'^2\right)$ $A=0$ *при движ. по окружности*
Сила инерции без названия	$m[\vec{r}\,',\vec{\beta}]$	На любое тело в неравномерно вращающейся системе	По касательной к траектории движения	Неконсервативна из-за неоднородности пространства и времени	$A \gtrless 0$ в зависимости от $\vec{\upsilon}\,'$; $A=0$ *при радиальном движении*
Кориолисова сила инерции	$2m[\vec{\upsilon}',\vec{\omega}]$	На тело, движущееся относительно вращающейся системы	$\perp\vec{\upsilon}'$ $\perp\vec{\omega}$	Гироскопическая, неконсервативная из-за неоднородности пространства	$A=0$ *всегда*

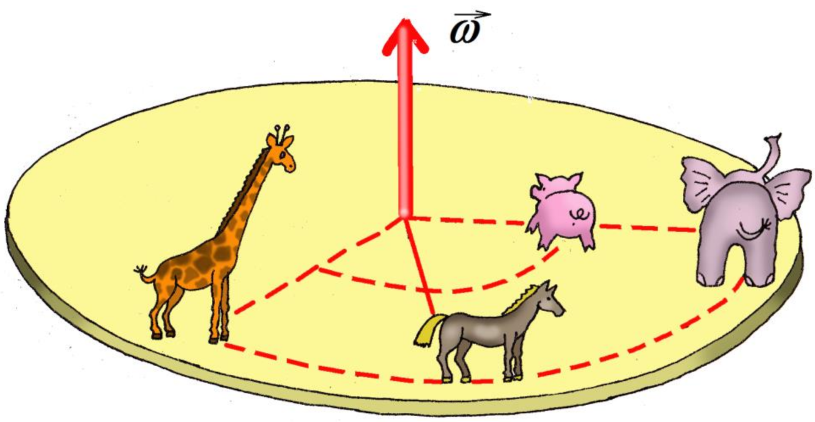
<u>Вопрос</u>. Где и когда можно ощутить действие этих сил на собственном опыте?



1) $\vec{F}_{ц.\,б.}=-m\omega^2\vec{R}$ – действует на каруселях.

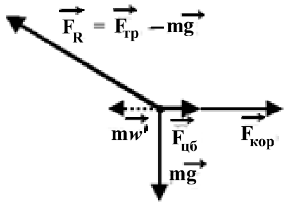
Крутясь на двухместных каруселях, в зависимости от того, хотите ли вы сами задавить приятеля или быть им задавленным, надо садиться в первом варианте ближе к оси вращения, а во втором – ближе к периферии.

2) $\vec{F}_{in}=m[\vec{r}\,',\vec{\beta}]$ – эта сила прижимает к спинке при ускорении и выталкивает при торможении каруселей. Спастись от $\vec{F}_{ц.\,б.}$ и $\vec{F}_{in}$ можно, только находясь на оси вращения.



3) $\vec{F}_{кор}=2m[\vec{\upsilon}',\vec{\omega}]$ – возникает, если захочется перебежать во время движения с одного места на другое.

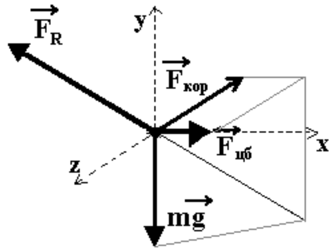
Посмотрим, как будет действовать сила $\vec{F}_{кор}$ на детских каруселях.



а) Если перебегать с жирафа на лошадку, то динамическое уравнение и векторная диаграмма будут следующими в *K′*-системе:

$$-\frac{m\upsilon'^2}{R}\vec{e}_{r'} = m\vec{g} + \vec{F}_R + m\omega^2\,\mathrm{R}\vec{e}_{r'} + 2m\upsilon'\omega\cdot\vec{e}_{r'}\,.$$

При этом должно выполняться условие $\vec{F}_{тр} \le kmg$, а иначе до лошадки не добежать, при этом бежать лучше медленно.



б) Перебежка слоник $\to$ поросёнок.

$\left|\vec{F}_R\right| = \sqrt{(mg)^2 + F^2_{ц.б.} + F^2_{кор}}$ < чем в предыдущем примере, то есть при таком перемещении положение более устойчивое.

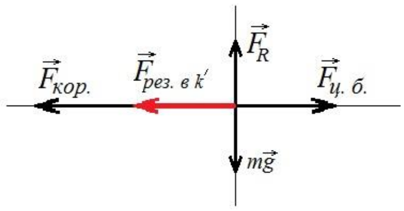
в) Перебежка поросёнок $\to$ слоник аналогична предыдущему случаю, только $\vec{F}_{кор}$ изменяет своё направление.

$$\left|\vec{F}_R\right| = \sqrt{(mg)^2 + F^2_{ц.б.} + F^2_{кор}}\,.$$

г) Перебежка слоник $\to$ лошадка.

Можно устроить такой режим движения, для которого $\vec{F}_{тр} = 0$. Для этого надо в системе Земли оставаться на одном и том же месте.

$$-\frac{m\upsilon'^2}{R}\vec{e}_{r'} = m\vec{g} + \vec{F}_R + m\omega^2\,\mathrm{R}\vec{e}_{r'} - 2m\upsilon'\omega\cdot\vec{e}_{r'}$$



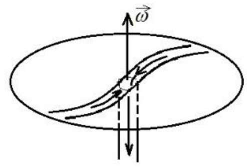
Примеры.

1. Шарик, катящийся по вращающейся платформе.

K' - система: $0 = m\vec{g} + \vec{F}_R + 2m[\vec{\upsilon}', \vec{\omega}] + m\omega^2\vec{R}$;

K - система: $m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{F}_R$.

Траектория движения шарика искривляется, так как $\vec{F}_{кор} \perp \vec{\upsilon}'$, аналогично искривляется трубка с водой на вращающемся диске.



2. Трубка с водой на вращающемся диске.

Аналогичный эффект возникает на Земле:

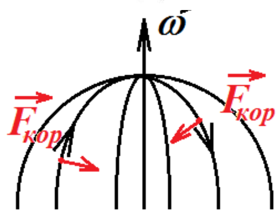
1) Северное полушарие:

а) Волга $\to$ подмыт западный (то есть правый берег высокий).

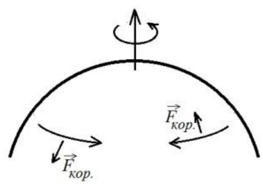
Обь, Енисей, Лена $\to$ подмыт восточный берег (то есть опять же правый)

б) Ока $\to$ подмыт правый берег, Урал (Яик) $\to$подмыт правый берег.

а) + *б*) $\Rightarrow$ в Северном полушарии у всех рек подмыт правый берег.



В связи с указанным эффектом в Северном полушарии возникает износ правых рельсов. Выход из положения – организация встречно-переменного движения по одним и тем же путям.

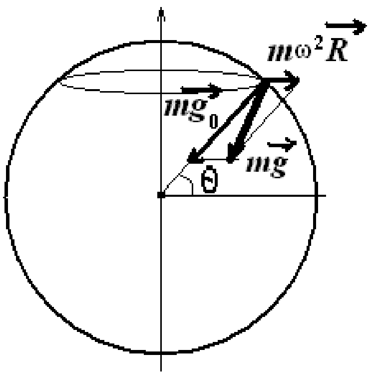


4. Зависимость ускорения свободного падения от географической широты местности

Сила тяжести складывается из двух сил:

$$m\vec{g} = m\vec{g}_0 + m\omega^2\vec{R},$$

где $m\omega^2\vec{R}$ – центробежная сила инерции, возникающая из-за вращения Земли вокруг собственной оси.



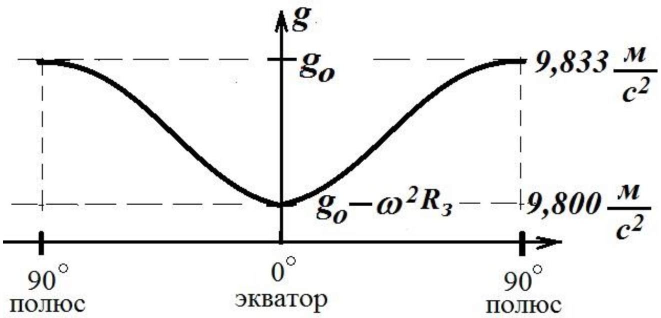
$$m\vec{g}_0 = \gamma\frac{mM_з}{R_з^2};$$

$$\vec{g}_0 = \gamma\frac{M_з}{R_з^2} = 9.833\frac{м}{с^2};$$

$$g^2 = g_0^2 + \left(\omega^4 R_з^2\cos^2\theta\right) - 2g_0\omega^2\cos^2\theta\cdot R_з;$$

$$R = R_з\cos\theta$$

$$g \approx g_0\sqrt{1-\frac{2\omega^2R_з}{g_0}\cos^2\theta} \approx g_0\left(1-\frac{\omega^2R_з}{g_0}\cos^2\theta\right).$$



Так как Земля не абсолютно круглый шар и сплюснута с полюсов, то точки экватора отстоят от центра дальше, чем полюса, что увеличивает эффект.

<u>Выводы:</u>

1) ускорение свободного падения тела $\vec{g}$ зависит от широты места, оно минимально на экваторе и максимально на полюсах;

2) направление отвеса не указывает на центр Земли.

Для нашей широты:

$$\theta = 56^\circ \approx 60^\circ;$$

$$g = 9.807\frac{м}{с^2}.$$

Угол между отвесом и направлением к центру Земли $\alpha \approx \dfrac{\omega^2 R_з\cos\theta}{g_0} \approx 0.1^\circ \approx 6'$.

5. Неинерциальность геоцентрической системы отсчёта

Неинерциальность геоцентрической системы отсчета подтверждается следующими фактами.

1. Отклонение падающих тел на восток из-за силы Кориолиса.

Вопрос. Что заставляет тело в инерциальной системе искривлять свою орбиту и отклоняться на восток?

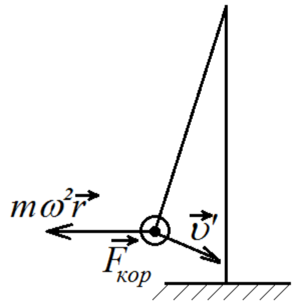
Ответ. То обстоятельство, что на большем расстоянии от центра Земли, где тело находилось первоначально, оно имело скорость вращения $\omega(R_з + h) > \omega R_з$ – скорость вращения точки поверхности под ним на той же широте.

2. Маятник Фуко.

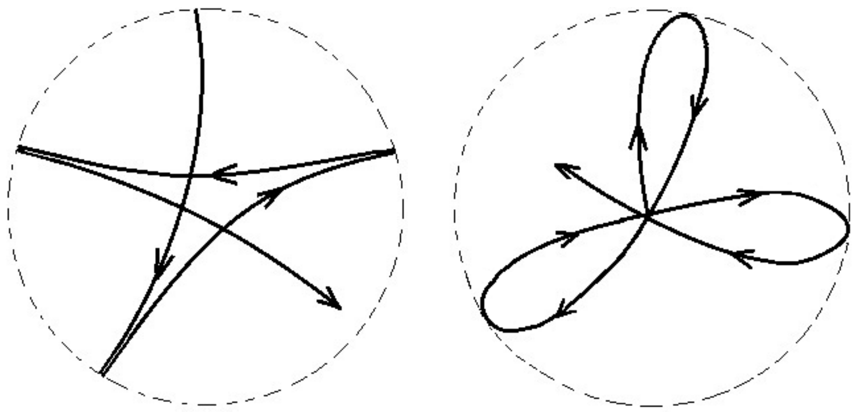
В горизонтальной плоскости действуют две силы:

$\vec{F}_{ц.б.} = m\omega^2\vec{R}$ и $\vec{F}_K = 2m[\vec{v}', \vec{\omega}]$.

Они-то и приводят к тому, что колебания маятник совершает не в одной плоскости, а движется по сложной траектории.



Вид сверху:



Если в начальный момент маятник отклонили из положения равновесия и без толчка отпустили	Если в начальный момент маятник, покоившийся в положении равновесия, толкнули

Движение маятника Фуко является экспериментальным доказательством неинерциальности геоцентрической системы.

II.4. Механика твёрдого тела

1. Основные уравнения и особенности динамики твердого тела

Порядок изучения кинематики был таков:

1. Основные понятия (путь, перемещение, скорость, ускорение).
2. Кинематика материальной точки $\equiv$ поступательное движение частицы.
3. Вращение частицы вокруг неподвижной оси.
4. Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси.
5. Плоское движение твёрдого тела $\equiv$ поступательное движение любой точки тела + вращение тела относительно этой точки.

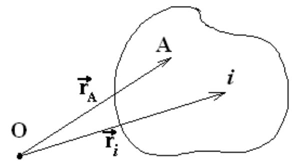
В динамике логика изложения та же:

1. Основные понятия (инерциальные системы, масса, импульс, классификация сил, центр масс, момент импульса и силы).
2. Динамика материальной точки $\equiv$ динамика поступательного движения.
3. Динамика вращательного движения материальной точки.
4. Динамика вращательного движения твёрдого тела вокруг неподвижной оси.
5. Динамика плоского движения твёрдого тела.

Отличие от кинематики:

в кинематике все точки тела были равноценны, и выделенной точкой в задаче являлась та точка, движение которой во времени было известно из условия задачи:

$$\left.\begin{array}{c} \vec{r}_A(t) \\ \omega \\ \hline \vec{r}_i;\ \vec{\upsilon}_i - ? \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \vec{r}_i = \vec{r}_A + \vec{r}_{Ai}; \\ \vec{\upsilon}_i = \vec{\upsilon}_A + \left[\vec{\omega}\times\vec{r}_{Ai}\right]. \end{array}$$



В динамике твёрдого тела существует выделенная точка. Это центр масс $\equiv$ центр тяжести $\equiv$ центр инерции.

<u>Вопрос.</u> Почему центр масс – выделенная точка?

<u>Ответ</u>. Потому что к ней приложены силы: тяжести и инерции (в неинерциальных системах отсчёта существуют силы, действующие со стороны самих систем, и точкой их приложения является центр масс).

Одно из уравнений динамики твердого тела – уравнение, описывающее поступательное движение центра масс (1). Второе уравнение (2) описывает вращение тела вокруг центра масс:

$$\begin{cases} m\vec{w}_c = \vec{F}_{внешн.}\ ; & (1) \\ \dfrac{d\tilde{\vec{M}}_c}{dt} = \tilde{\vec{N}}_c\ . & (2) \end{cases}$$

Таков принцип разбиения для удобства решения задач динамики твёрдого тела.

2. Условия равновесия твёрдого тела

Тело остаётся в состоянии равновесия, если нет причин, вызывающих изменение его состояния покоя или прямолинейного и равномерного движения.

В системе, где тело покоится:

$$\begin{cases} \vec{F} = \sum\limits_{i}^{I} \vec{F}_{i\,внешн.} = 0 \\ \vec{N}_o = \sum\limits_{i}^{I} \vec{N}_{o\,i_{внешн.}} = 0 \end{cases} . \quad (1)$$

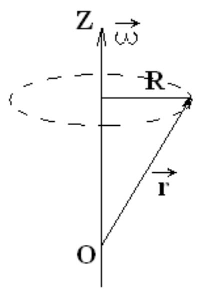
Уравнение моментов можно написать относительно любой неподвижной точки O системы, где тело покоится.

Условия (1) являются необходимыми, но не достаточными, так как, даже если $\vec{F} = 0$, центр масс системы может двигаться с $\vec{\upsilon} = const$. Но, допустим, мы перейдём в Ц-систему, тогда в этой системе поступательного движения тела не будет; но оно может вращаться, имея в этой системе $\vec{M}_0 = I\vec{\omega} = const$. Это движение устранить труднее, так как для этого надо перейти в неинерциальную систему, а в ней необходимо учитывать силы инерции.

3. Вращение тела вокруг неподвижной оси. Момент инерции относительно неподвижной оси

а) <u>Для материальной точки.</u>

При вращении материальной точки массы m вокруг неподвижной оси z её момент импульса относительно произвольной точки O этой оси и относительно оси z:



$$\vec{M}_o = mR^2\vec{\omega};$$

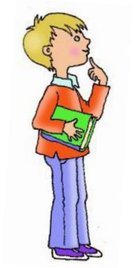
$$M_z = mR^2\omega.$$

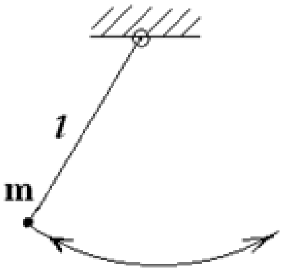
<u>Опред.</u> $I = mR^2$ – *момент инерции частицы относительно оси z.*

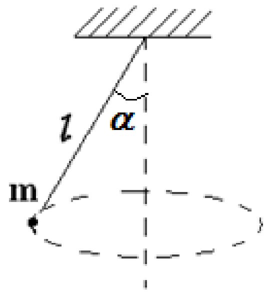
$I \neq f(\omega), I$ характеризует инертные свойства частицы по отношению к её вращению относительно данной оси. Полная аналогия с массой: чем больше масса, тем труднее её разогнать, если она покоится, или остановить, если она движется. Чем больше I, тем труднее раскрутить частицу или остановить её вращение.

Для частицы $M_z = I_z\omega_z$

<u>Примеры:</u> 1) $I_z = ml^2$; 2) $I_z = ml^2\sin^2\alpha$.



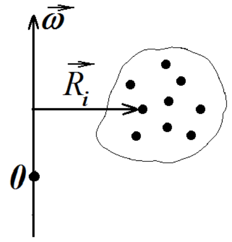




б) <u>Для системы частиц.</u>

$\vec{M}_i = m_i R_i^2 \vec{\omega}$ – момент импульса *i*-й частицы относительно оси *z*.

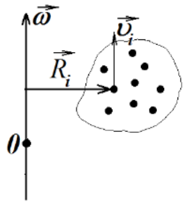
$\vec{M} = \vec{e}_z M_z = \vec{M}_{\parallel} = \sum m_i R_i^2 \vec{\omega} = I_z \vec{\omega}$ – момент импульса системы частиц относительно оси *z*.



<u>Опред.</u> *Момент инерции системы материальных точек* $I_z = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2$ *относительно оси z, где R_i – расстояние i-й точки до оси вращения.*

Изменение момента импульса системы относительно оси определяется моментом сил, приложенных к системе, относительно этой оси $\frac{d\vec{M}_{\parallel}}{dt} = \vec{N}_{\parallel} = \frac{d}{dt}(I_z \times \vec{\omega})$.

Система частиц может не обладать моментом импульса, но иметь момент инерции *I*, вполне аналогично тому, что тело может покоиться, но обладать при этом массой.



<u>Замечание.</u>

Если точки системы движутся:

1) вдоль оси, то от этого движения

$\Delta\vec{M} = \Delta\vec{M}_{\perp} \Rightarrow \vec{M}_{\parallel} = const = I_z\vec{\omega} \Rightarrow I_z = const$;

2) по радиусу, то $I_z(t)$ меняется, но связь $M_{\parallel} = I_z\omega$ сохраняется, так как сама $\vec{\upsilon}_R$ не вносит вклада в момент импульса относительно оси.

3) Если же частицы движутся по $\vec{e}_{\varphi}$, то это отражается на изменении ω_i.

Форма $\frac{d}{dt}(I_z \times \vec{\omega}) = \vec{N}_{\parallel}$ – универсальная и является основным уравнением динамики вращательного движения вокруг неподвижной оси.

в) <u>Для твердого тела.</u>

Частным случаем системы материальных точек является *твёрдое тело – система, в которой расстояния между элементами массы не изменяются с течением времени.*

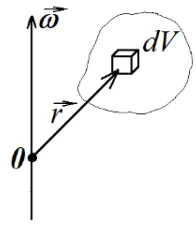
Для непрерывного распределения массы $dm = \rho(\vec{r})dV$.

<u>Опред.</u> $I_z = \int_V \rho(\vec{r}) R^2 dV$ – *момент инерции твёрдого тела относительно оси z. Здесь R – расстояние от элемента массы ρdV до оси z.*

В случае дискретного распределения массы вместо интеграла – сумма и $I_z = \sum_{i=1}^{I} m_i R_i^2$.

Момент импульса твердого тела $\vec{M}_{\parallel}$ относительно оси *z*, параллельной $\vec{\omega}$: $\vec{M}_{\parallel} = I_z\vec{\omega}$.

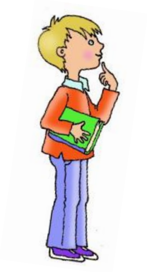
$$\frac{d\vec{M}_{\parallel}}{dt} = \vec{N}_{\parallel} = \frac{d}{dt}(I_z \times \vec{\omega}) \Rightarrow$$



так как $I_z = const$ для твёрдого тела $\Rightarrow I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{N}_{\parallel}$ или

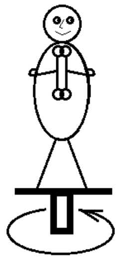
$I_z \vec{\beta} = \vec{N}_{\parallel}$ – *уравнение вращательного движения твёрдого тела относительно неподвижной оси.*

Если $\vec{N}_{\parallel}$ относительно оси =0, то тело вращается с $\vec{\omega} = const$.



Пример.

В качестве примера обсудим ситуацию: человек с гантелями, держа их у груди, стоит на скамье Жуковского или вращающейся тарелке.



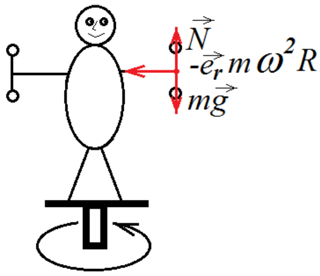
Вопрос 1. Что сохраняется, когда человек, стоящий на вращающейся скамье, разводит руки с гантелями, и к чему это приводит?

Ответ. Если $\vec{N}_{\parallel} = 0$, то момент импульса системы сохраняется: $I\omega = const$.

Все силы, кроме сопротивления, бессильны изменить момент импульса скамьи с человеком, так как они либо внутренние (силы взаимодействия человека со скамьёй и гантелями), либо параллельны оси вращения $(m\vec{g}, \vec{N})$.

Силы, действующие на каждую гантель, $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{F}_м$.

$\vec{F}_м = -m\omega^2 r\vec{e}_r + \vec{N}$ – мускульная сила человека.



Момент инерции I системы «человек + гантели»:

$$I = I_ч + 2I_г = I_ч + 2mR^2.$$

С увеличением $\uparrow R \Rightarrow \uparrow I \Rightarrow \downarrow \omega$, так как $I\omega = const$.

Таким образом, при разведении рук с гантелями угловая скорость вращения уменьшается.

Вопрос 2. Изменяется ли механическая энергия системы «человек + гантели» и почему?

Ответ. Да, изменяется.

Когда она больше?

$U = const \Rightarrow \Delta E = \Delta T = T_2 - T_1 = A_{всех\_сил}$.

Следует помнить, при вычислении работы имеет значение только относительное движение взаимодействующих тел.

$(m\vec{g} + \vec{N})$ работу не совершают, так как они перпендикулярны перемещению. Радиальная составляющая силы $\vec{F}_{м\perp} = -m\omega^2 R\vec{e}_r$ действует против перемещения при разведении рук, поэтому ее работа отрицательна и $\Delta T = T_2 - T_1 < 0$.

$$A_{12} = -\int_0^R m\omega^2 r\vec{e}_r d r\vec{e}_r; \qquad T_2 - T_1 = \frac{I_ч\omega_2^2}{2} - \frac{I_ч\omega_1^2}{2} + \frac{2mR^2\omega_2^2}{2} < 0.$$

Здесь $I_ч$ – момент инерции человека без гантелей относительно оси вращения.

Вопрос 3. Но сила $\vec{F}_{м\perp} = -m\omega^2 R\vec{e}_r$ – центральная, почему же она изменяет полную механическую энергию E?

Ответ. В данном случае $\vec{F}_м$ зависит от $\vec{\upsilon} \Rightarrow F_м$, хотя и является центральной силой, но не является неконсервативной $\Rightarrow \Delta E = A_Н$ работе неконсервативных сил $\Rightarrow$ E уменьшается.

Вопрос 4. Тогда другой вопрос: почему у гантелей как таковых изменяется момент импульса, ведь сила $\vec{F}_м = -m\omega^2 r\vec{e}$ – центральная, поэтому независимо от того, является она консервативной или неконсервативной, она не может изменить момент импульса гантелей.

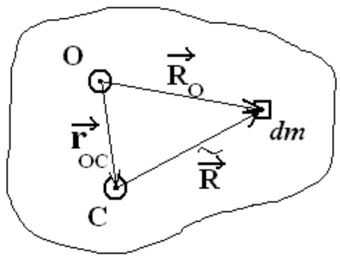
$\omega_1(I_{ч_1} + 2mR_1^2) = \omega_2(I_{ч_2} + 2mR_2^2)$, т. к. $I_{ч_1}\omega_1 \neq I_{ч_1}\omega_2$, то есть момент импульса гантелей, несомненно, изменяется. Кто в этом виноват?

Ответ. Если бы существовала только центральная сила взаимодействия человека с гантелями, то должен был сохраняться в отдельности момент импульса гантелей и момент импульса человека, но при этом их угловые скорости $\vec{\omega}_ч$ и $\vec{\omega}_г$ стали бы разными, то есть руки должны были бы закручиваться вокруг человека. Человек в этом не заинтересован, и он осуществляет выравнивание $\vec{\omega}_ч$ и $\vec{\omega}_г$ за счёт сил бокового давления на гантели. Так как эти силы перпендикулярны радиусам-векторам гантелей $r\vec{e}_r$ относительно оси вращения и не лежат в одной плоскости с осью вращения, то силы бокового давления изменяют момент импульса гантелей $\frac{d\vec{M}_г}{dt} = \vec{N}_{этих\ сил} \neq 0.$

4. Теорема Штейнера

Теорема Штейнера устанавливает связь между моментом инерции тела относительно двух различных параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс тела.

Рассмотрим две параллельные оси, одна из которых проходит через центр масс тела – точку *C*, а другая – через произвольную точку *O*, и найдем связь между моментами инерции тела относительно этих осей.



Пусть расстояние между осями $r_{OC} = a$. Тогда расстояние от элемента массы $\rho\, dV$ до оси, проходящей через т. *C*, равняется $\tilde{\vec{R}}$, а до оси, проходящей через точку O – $\vec{R}_O = \tilde{\vec{R}} + \vec{r}_{OC}$.

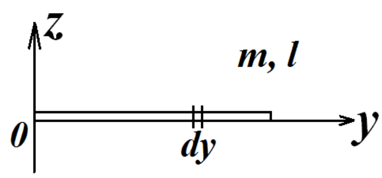
$$I_{c_z} = \int_V \rho \tilde{\vec{R}}^2 dV;$$

$$I_{0_z} = \int_V \rho \vec{R}_O{}^2 dV = \int_V \rho(\tilde{\vec{R}} + \vec{r}_{oc})^2 dV = I_{c_z} + 2\vec{r}_{oc} \underbrace{\frac{\int_V \rho \tilde{\vec{R}} dV}{m}}_{=\tilde{\vec{R}}_c = 0} m + \vec{r}_{oc}{}^2 \underbrace{\int_V \rho dV}_{=m},$$

$I_0 = I_c + m\vec{r}_{OC}^{\,2} \Rightarrow I_0 = I_c + ma^2$ – *теорема Штейнера.*

5. Принципы расчёта моментов инерции относительно неподвижных осей и применения теоремы Штейнера

1. **Стержень** массы m и длины l. $I_z - ?, I_c - ?$



Введем $m_1 = \frac{m}{l}$ – масса единицы длины стержня.

Тогда $dm = m_1 dy$ – масса элемента длины стержня dy.

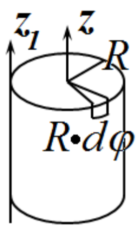
$dI_z = m_1 dy \cdot y^2;$

$I_z = \int_0^l \frac{m}{l} y^2 dy = \frac{ml^2}{3}$ – *относительно оси, проходящей через конец стержня.*

$I_z = I_c + \frac{ml^2}{4} \Rightarrow I_c = \frac{ml^2}{12}$ – *относительно оси, проходящей через центр масс.*

2. **Полый цилиндр (цилиндрический слой)** h, R, m.

$I_{c_z} - ?$ $I_{z_1} - ?$



$m_1 = \dfrac{m}{2\pi Rh}$ – масса единицы площади поверхности цилиндра.

$dm = m_1 ds$ – масса элемента площади цилиндра ds;

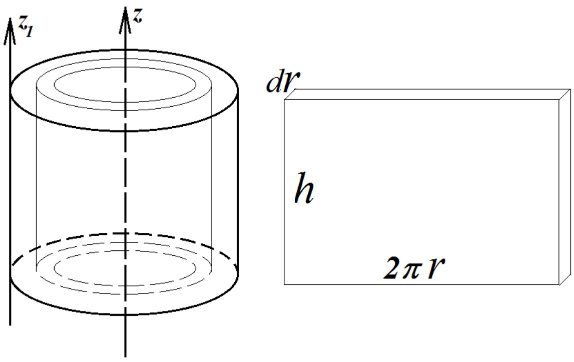
$ds = Rd\varphi \cdot dz$;

$dI_{cz} = m_1 R^2 \times Rd\varphi \times dz$;

$I_{c_z} = \dfrac{m}{2\pi Rh} \times R^3 \times \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h dz = mR^2$ – *момент инерции полого цилиндра относит. его оси.*

$I_{z_1} = I_{c_z} + mR^2 = 2mR^2$ – *момент инерции полого цилиндра относит. его образующей.*

3. **Цилиндр** m, h, R. $I_{c_z} - ?$ $I_{z_1} - ?$



$m_1 = \dfrac{m}{\pi R^2 h}$ – *масса единицы объёма;*

$dm = m_1 \times dV = m_1 h \cdot 2\pi r dr = \dfrac{m}{\pi R^2 h} 2\pi h r dr = \dfrac{m}{R^2} 2r dr$ – *масса элемента объёма* $dV = h \cdot 2\pi r dr$.

Используя выражение I_{c_z} *для цилиндрического слоя, имеем:*

$dI_{c_z} = dm \cdot r^2 = \dfrac{m}{R^2} \cdot 2r^3 dr \rightarrow I_{c_z} = \int\limits_0^{I_{c_z}} dI_{c_z}$.

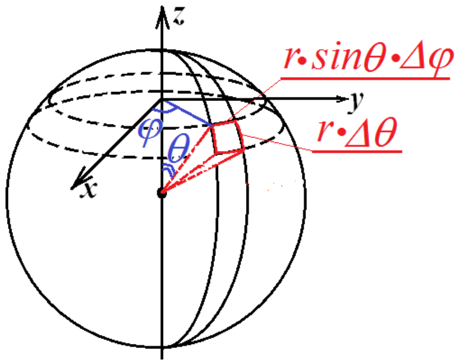
$I_{c_z} = \dfrac{m}{R^2} \cdot \dfrac{1}{2} R^4 = \dfrac{mR^2}{2}$ – *момент инерции цилиндра относительно его оси.*

$I_{z_1} = \dfrac{mR^2}{2} + mR^2 = \dfrac{3}{2} mR^2$ – *момент инерции цилиндра относительно его образующей.*

Вопрос. Почему I_{c_z} не зависит от h? Ведь если I_z определяет собой крутящий момент, необходимый для раскручивания тела до определенной ω, то очевидно, что из двух цилиндров, сделанных из одного материала и отличающихся только длиной, короткий цилиндр раскрутить легче, чем длинный. Но полученное выражение I_{c_z} для цилиндра не зависит от h, как же так?

Ответ. I_z зависит от массы. Так как масса длинного цилиндра $m_1 > m_2$ больше массы короткого, при $R_1 = R_2 \Rightarrow I_{c_1} > I_{c_2}$.

4. **Шаровой слой или сфера** m, R. I_{c_z} – ?



$m_1 = \dfrac{m}{4\pi R^2}$ – *масса единицы площади;*

$dm = m_1 \times dS$ – *масса элемента площади* dS;

$dS = Rd\theta \times R\sin\theta d\varphi$ – *элемент площади сферы;*

$$dm = m_1 Rd\theta \times R\sin\theta d\varphi == \frac{m}{4\pi} d\theta \sin\theta d\varphi;$$

$$dI_{c_z} = \frac{m}{4\pi}\sin\theta d\theta \times d\varphi \times (R\sin\theta)^2 \Rightarrow$$

$$I_{c_z} = \frac{mR^2}{4\pi} 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta = \ldots$$

$$\sin^3\theta d\theta = -d(\cos\theta) \times \left[1 - \cos^2\theta\right];$$

введем замену переменных $\cos\theta = u$, при этом изменятся пределы интегрирования $\int_1^{-1}$.

$$\ldots = \frac{mR^2}{2}\left[-\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1\right] = \frac{2}{3} mR^2 \text{ – момент инерции сферы.}$$

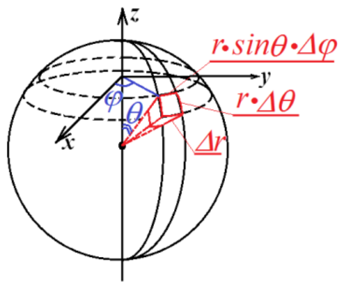
Другой способ вычисления I_z сферы: нарежем колечки, перпендикулярные оси z, – это цилиндрические слои, имеющие радиус $R\sin\theta$ и массу $dm' = m_1 \times 2\pi R\sin\theta \times Rd\theta$.

$dI'_z = dm' \times (R\sin\theta)^2$ – *момент инерции колечка.*

Интегрируя по массе dm', получим *момент инерции сферы*:

$$I_z = \int_0^{\pi} \frac{m}{4\pi R^2} \times 2\pi R\sin\theta d\theta \times (R\sin\theta)^2 = \frac{mR^2}{2}\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta = \frac{2}{3} mR^2.$$

5. **Шар** m, R. I_{c_z} – ?



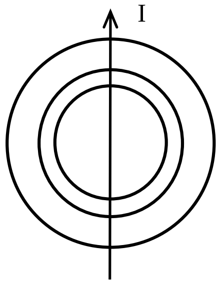
Масса единицы объема $m_1 = \dfrac{m}{{}^4\!/_3\,\pi R^3} = \dfrac{3m}{4\pi R^3}$.

Момент инерции шара можно вычислять, выразив в сферических координатах элемент объема, как показано на рисунке,

$dV = dr \cdot rd\theta \cdot r\sin\theta \cdot d\varphi.$

Затем надо проинтегрировать $dI_{c_z} = m_1 \cdot (r \cdot \sin\theta)^2 \cdot dV$.

Но проще для вычисления момента инерции шара разбить шар на сферические слои толщины dr и массы dm и воспользоваться уже известным выражением для момента инерции сферы:

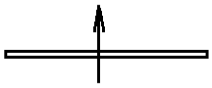
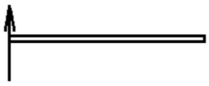
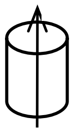
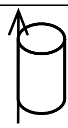
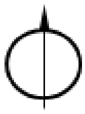
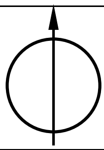
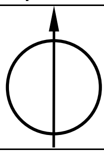


$$dm = m_1 \times 4\pi r^2 dr = \frac{3m}{4\pi R^3} \times 4\pi r^2 dr;$$

$$dI_{c_z} = \frac{2}{3} \times \frac{3m}{R^3} r^2 dr \times r^2 = \frac{2m}{R^3} r^4 dr;$$

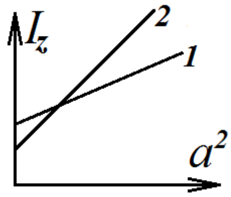
$$I_{c_z} = \frac{2}{5} mR^2 \text{ – момент инерции шара.}$$

Сведем вычисленные моменты инерции в одну таблицу.

Тело	I_{c_z}	I_z
Стержень m, l	 $\frac{ml^2}{12}$	 $\frac{ml^2}{3}$
Полый цилиндр m, R, h	 mR^2	 $2mR^2$
Диск m, R	 $\frac{mR^2}{2}$  $\frac{mR^2}{4}$	 $\frac{3}{2}mR^2$
Сфера m, R	 $\frac{2}{3}mR^2$	 $\frac{5}{3}mR^2$
Шар m, R	 $\frac{2}{5}mR^2$	 $\frac{7}{5}mR^2$

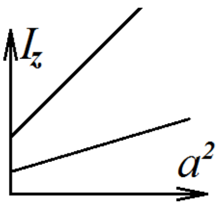
6. Качественные вопросы.

а) Даны графики зависимости моментов инерции вытянутого и сплюснутого цилиндров, изготовленных из одного материала, в зависимости от квадрата их расстояния до оси вращения. Где чей график?



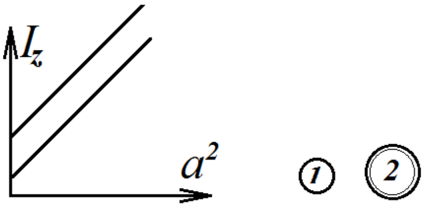
Ответ. $m_2 > m_1$, но $I_{c_1} > I_{c_2}$, то есть вытянутый цилиндр – 2, сплюснутый – 1.

б) Даны графики моментов инерции шаров, изготовленных из одного материала, в зависимости от квадрата их расстояния до оси вращения. Где чей график?



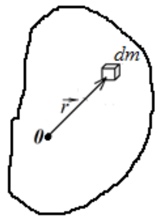
Ответ. Так как $m_2 > m_1$ и $R_2 > R_1$, то верхний график соответствует шару 2, а нижний – 1.

в) Даны шар 1 и сферический слой 2, изготовленные из одного материала, с равными массами $m_2 = m_1$. Изобразить зависимости $I_z(a^2)$ для этих тел.



Ответ представлен на рисунке. Верхний график соответствует сферическому слою 2, нижний – шару 1.

6. Свойства моментов инерции относительно трёх взаимно перпендикулярных осей



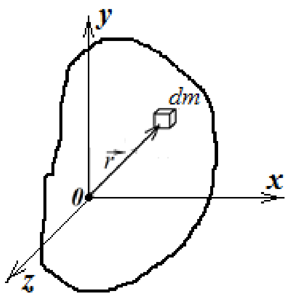
1. <u>Опред</u>. $I_0 = \int\limits_m r^2 dm -$ *момент инерции твёрдого тела относительно точки 0.*

В динамике I_0 не играет особой роли, но иногда его вычислить проще, чем I_z относительно оси.

<u>Вопрос.</u> Когда это так?

<u>Ответ.</u> Если тело симметрично относительно этой точки, например шар, сферический слой.

$$\left.\begin{aligned} dI_z &= dm(x^2 + y^2) \\ dI_x &= dm(y^2 + z^2) \\ dI_y &= dm(x^2 + z^2) \end{aligned}\right\} (+) \Rightarrow dI_z + dI_x + dI_y = 2dm(x^2 + y^2 + z^2) = 2dI_0 .$$



Интегрируя по *dm*, получаем:

$2I_0 = I_x + I_y + I_z$ – *свойство моментов инерции относительно трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через одну точку O.*

Это свойство облегчает расчёт моментов инерции:

а) сферического слоя:

$$I_0 = mR^2; I_x = I_y = I_z; \Rightarrow 2mR^2 = 3I_z \Rightarrow I_z = \frac{2}{3}mR^2;$$

б) шара:

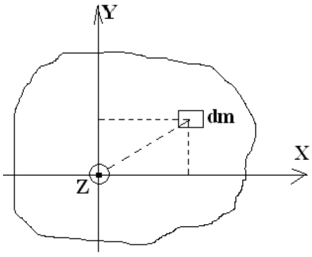
$$dI_0 = r^2 dm = r^2 m_1 \cdot r^2 4\pi dr = \frac{m}{(4/3)\pi R^3} 4\pi r^2 dr \cdot r^2 = \frac{3m}{R^3} r^4 dr;$$

$$I_0 = \int\limits_0^R \frac{3m}{R^3} r^4 dr = \frac{3}{5} mR^2.$$

Так как $I_x = I_y = I_z \Rightarrow 2I_0 = \dfrac{2 \cdot 3mR^2}{5} = \dfrac{6}{5} mR^2 = 3I_z \Rightarrow I_{c_z} = \dfrac{2}{5} mR^2.$

2. Для плоского распределения массы:

$$\begin{cases} dI_z = dm(x^2+y^2); \\ dI_x = dm\cdot y^2; \\ dI_y = dm\cdot x^2. \end{cases}$$

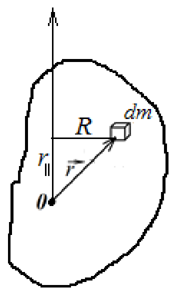


После суммирования $dI_x + dI_y$ интегрирование по массе тела даёт:

$I_z = I_x + I_y$ – *свойство моментов инерции плоского тела, принадлежащего плоскости (xy).*

Замечание. Даже при вращении тела вокруг неподвижной оси *z*, вообще говоря, $\vec{M}_0 \neq I_z\vec{\omega},$ где точка 0 – произвольная точка на оси вращения. Покажем это:

$$d\vec{M}_0 = \left[\vec{r},\left[\vec{\omega}\vec{R}\right]\right]dm = \left[r_{\|}\vec{e}_z + \mathrm{R}\vec{\mathrm{e}}_r,\left[\vec{\omega}\vec{R}\right]\right]dm = \left\{\vec{\omega}(\vec{R}\vec{R}) - \vec{R}(\vec{\omega}\vec{r})\right\}dm =$$
$$= \left\{\vec{\omega}R^2 - \vec{R}\omega r_{\|})\right\}dm \Rightarrow d\vec{M}_0 \not\parallel \vec{\omega}.$$



Слагаемое ($-\vec{R}\omega r_{\|}\ dm$) при интегрировании занулится, если любой массе *dm* будет поставлена в соответствие такая же масса *dm*, имеющая координаты $(-\vec{R}, r_{\|})$. Таким образом, момент импульса $\vec{M}_0$ параллелен $\vec{\omega}$, если ось вращения проходит через центр масс и является осью симметрии тела. В этом случае $\vec{M}_0 = I_{\|}\vec{\omega} = const$ для любой точки *0*, принадлежащей оси вращения.

7. Кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

$$dT = \frac{dm\times\upsilon^2}{2} = \frac{dm\times R^2\omega^2}{2} \Rightarrow T = \int dT = \int dm\frac{R^2\omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\cdot I_{\|}.$$

Возвращаясь к скамье Жуковского:

$$T_1 = \frac{(I_ч + 2m_г R^2)\omega_1^2}{2} = \frac{M_{\|1}^{\ 2}}{2(I_ч + 2m_г R^2)}$$ (руки вытянуты на длину *R*).

Здесь $I_ч$ – момент инерции человека относительно оси вращения до сведения рук, $I_ч'$ – момент инерции человека относительно оси вращения после сведения рук, $m_г$ – масса одной гантели, T_1 – кинетическая энергия вращающегося человека с гантелями в вытянутых в стороны руках.

После сведения рук с гантелями:

$$T_2 = \frac{I_ч\omega_2^2}{2} = \frac{M_{\|2}^{\ 2}}{2I_ч'}.$$

Так как $M_{\|1} = M_{\|2} = M_{\|} \Rightarrow T_2 - T_1 = \dfrac{M_{\|}^{\ 2}}{2}\left(\dfrac{1}{I_ч'} - \dfrac{1}{I_ч + 2mR^2}\right) > 0 \Rightarrow T_2 > T_1,$

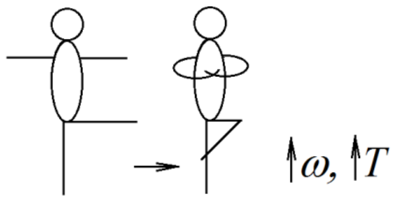
то есть кинетическая энергия увеличивается.

Вопрос. За счёт чего?

Ответ. За счёт работы человека по сведению рук с гантелями.

Примеры

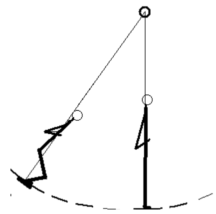
1) Фуэте балерины, фигуристки.



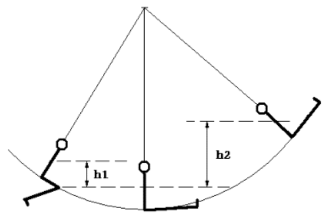
2) Гимнаст делает сальто в группировке. Здесь ось движется, но если она проходит центр масс системы, то вращение совершается по тем же законам, что и вокруг неподвижной оси.

3) Принцип раскачивания на качелях:

а) выпрямляясь в нижней точке, человек увеличивает кинетическую энергию Т, которая переходит в потенциальную, увеличивая высоту раскачивания;



б) ребёнок на качелях:



$$T = \frac{M^2}{2I}; mgh_1 = \frac{m\upsilon_1^2}{2} = \frac{I_1\omega_1^2}{2} = \frac{M_1^2}{2I_1};$$

$$E = const;$$

$$I_2 < I_1,$$

$$M_1 = M_2 \Rightarrow T_2 = \frac{M^2}{2I_2} > T_1 \Rightarrow h_2 > h_1.$$

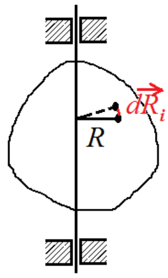
3) Земля при вращении вокруг собственной оси ведёт себя подобно скамье Жуковского. За счёт перераспределения массы (вулканическая деятельность, выпадение осадков, горообразование) возникает изменение периода обращения вокруг собственной оси, которое имеет следующие тенденции: периодичность + медленное возрастание.

Вопрос. Чем определяется периодичность?

Ответ. Осадки, приливы и отливы и т.д., при этом период колебания длительности суток равен одному году и имеет амплитуду $10^{-3}c$. Увеличение периода обращения означает уменьшение угловой скорости. За последнее столетие средняя длительность солнечных суток увеличилась на $1{,}6 \cdot 10^{-3}\ c$. Таким образом, наш год на 0,6 с длиннее, чем у жителей XIX века.

8. Работа внешних сил при вращении тела вокруг неподвижной оси

Пусть в точке, находящейся на расстоянии R_i от оси вращения, к твёрдому телу приложена сила $\vec{F}_i$.



$$dA_i = \vec{F}_i d\vec{R}_i;$$

$$d\vec{R}_i = \left[d\vec{\varphi}\ ,\vec{R}_i\right];$$

$$dA_i = \left[d\vec{\varphi},\vec{R}_i\right]\vec{F}_i = \left[\vec{R}_i,\vec{F}_i\right]d\vec{\varphi} = \vec{N}_i d\vec{\varphi}.$$

После суммирования по всем силам $\Rightarrow$

$$\Rightarrow dA = \sum_i \vec{N}_i d\vec{\varphi} = \vec{N} d\vec{\varphi}\ \ (\vec{N} - \text{суммарный момент внешних сил}).$$

Замечание. Если в выводе фигурирует расстояние $\vec{R}$ до оси вращения, то $\vec{N}$ – момент внешних сил относительно оси; если расстояние до точки O на оси вращения $\vec{r}$, то $\vec{N}$ – момент внешних сил относительно точки O, принадлежащей оси вращения.

$A = \int dA = \int \vec{N} d\vec{\varphi} = \int \vec{N}\frac{d\vec{\varphi}}{dt}dt = \int \vec{N}\vec{\omega}dt -$ *работа внешних сил при вращении тела вокруг неподвижной оси.*

$\frac{dA}{dt} = P = \vec{N}\vec{\omega} -$ *мощность внешних сил при вращении тела вокруг неподвижной оси.*

$$A_{12} = \int_1^2 \frac{d\vec{M}_\parallel}{dt}\times\vec{\omega}dt = \int_1^2 d\vec{M}_\parallel\vec{\omega} = \int_1^2 I_\parallel\vec{\omega}d\vec{\omega} = \frac{I\omega_2^2 - I\omega_1^2}{2} = T_2 - T_1\ . \qquad (1)$$

Вернемся к вращающейся скамье Жуковского и человеку с двумя гантелями на ней. Вычислим работу при разведении рук:

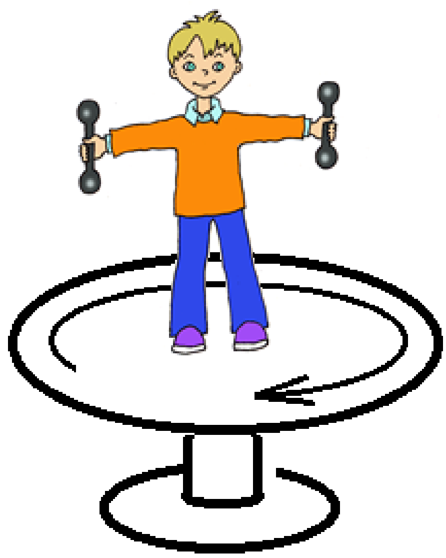
$A = \int_R^0 -2m\omega^2 r\vec{e}_r(dr\vec{e}_r) = \ldots$, но так как $\omega = f(r)$, так интегрировать нельзя. А как можно?

Ответ. Так, как уже делали, учитывая, что $\omega^2 I^2 = M_\parallel^2 = const$:

$$\ldots = -\int_R^0 2m\times\frac{\omega^2 I^2}{I^2}rdr = -\frac{M_\parallel^2}{2}\int_R^0\frac{2\times 2rdr}{(I_ч + 2m_г r^2)^2} = \frac{M_\parallel^2}{2}\left[\frac{+1}{I_ч + 2m_г r^2}\right]_R^0 =$$

$$= \frac{M_\parallel^2}{2}\left[\frac{-1}{I_ч + 2m_г R^2} + \frac{1}{I_ч}\right] = \frac{I_2\omega_2^2}{2} - \frac{I_1\omega_1^2}{2}.$$

Этот пример является частным свидетельством того, что формула (1), полученная для работы при вращении твёрдого тела с $I=const$ вокруг неподвижной оси, справедлива и в более общем случае изменяющегося момента инерции I при неизменной массе тела $m = const$.



9. Аналогия между поступательным движением материальной точки и вращением тела относительно неподвижной оси

	Понятие	Поступательное движение материальной точки	Вращательное движение тела
1	перемещение	$d\vec{r}$	угловое $d\vec{\varphi}$
2	скорость	$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	угловая $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
3	ускорение	$\vec{w} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$	угловое $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
4	инертные свойства	$m = \int\limits_V \rho(\vec{r})dV$	$I_z = \int\limits_V \rho(\vec{r})R^2 dV$
5	импульс	$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$	момент импульса $\vec{M}_{\parallel} = I_z\vec{\omega}_{\parallel}$
6	внешнее воздействие	сила $\vec{F}$	момент силы $\vec{N}_{\parallel} = \left[\vec{R}\vec{F}\right]$
7	динамическое уравнение	$m\vec{w} = \vec{F}$	$I_z\vec{\beta}_{\parallel} = \vec{N}_{\parallel}$
8	кинетическая энергия движения	$T = \frac{m\upsilon^2}{2}$	$T = \frac{I_z\omega^2}{2}$
9	мощность	$P = \vec{F}\cdot\vec{\upsilon}$	$P = \vec{N}_{\parallel}\times\vec{\omega}$
10	работа	$A_{12} = \int\limits_1^2 \vec{F}d\vec{r}$	$A_{12} = \int\limits_1^2 \vec{N}d\vec{\varphi}$

10. Динамика плоского движения твёрдого тела

При плоском движении траектории всех точек тела лежат в параллельных плоскостях. *Плоское движение может быть разложено на поступательное движение центра масс + вращение тела относительно центра масс.*

$$\begin{cases} m\vec{w}_C = \vec{F}; \quad (1) \\ I_{C\|}\tilde{\vec{\beta}} = \tilde{\vec{N}}_{\|C}. \quad (2) \end{cases}$$

Это момент только внешних сил, так как момент сил инерции относительно точки C равен нулю.

Если движение плоское, то центр масс движется, как и другие точки тела, по плоской траектории, а вектор $\vec{\omega}\perp$этой плоскости, то есть тело совершает вращение вокруг оси, перпендикулярной плоскостям, в которых лежат траектории точек тела. Вращение тела описывается уравнением (2). При этом $\vec{\omega},\varphi,\vec{\beta} = invar$ в любой системе отсчёта как в *Ц*-системе, так и в лабораторной.

11. Кинетическая энергия твёрдого тела при плоском движении

Скорость движения элемента массы dm выразим через скорость точки C центра масс и скорость вращения вокруг точки C:

$$\vec{\upsilon}_{dm} = \vec{\upsilon}_C + [\vec{\omega},\tilde{\vec{r}}].$$

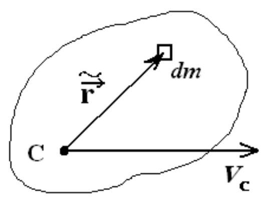
Кинетическая энергия этого элемента массы:

$$dT = \frac{dm\times\upsilon^2}{2} = \frac{\upsilon_C^2 dm}{2} + \frac{\omega^2 R^2 dm}{2} + \vec{\upsilon}_C\left[\vec{\omega},\tilde{\vec{r}}dm\right], \ \textit{так как}\ \upsilon^2 = \upsilon_C^2 + (\left[\vec{\omega},\tilde{\vec{r}}\right])^2 + 2\vec{\upsilon}_C\left[\vec{\omega},\tilde{\vec{r}}\right];$$

$$\left|\left[\vec{\omega},\tilde{\vec{r}}\right]\right| = \omega R.$$

Интегрируем по dm:

$$T = \frac{m\upsilon_C^2}{2} + \frac{I_{C\|}\omega^2}{2} + \underbrace{\vec{\upsilon}_C\left[\vec{\omega}\int_m \tilde{\vec{r}}dm\times\frac{m}{m}\right]}_{0}, \ \textit{так как}\ \frac{1}{m}\int_m \tilde{\vec{r}}dm = \tilde{\vec{R}}_C = 0 \Rightarrow$$



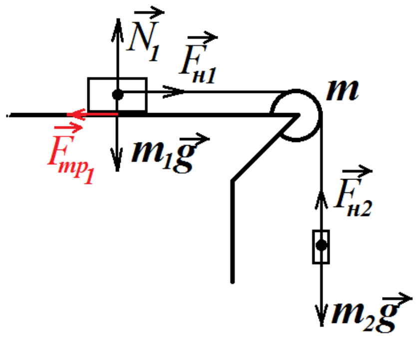
$$\Rightarrow T = \frac{m\upsilon_C^2}{2} + \frac{I_{C\|}\omega^2}{2} = \frac{m\upsilon_C^2}{2} + \frac{\tilde{\vec{M}}_{C\|}\vec{\omega}}{2}.$$

Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении равняется сумме кинетической энергии движения центра масс, равной энергии движения материальной точки массой m со скоростью $\vec{\upsilon}_C$, и энергии вращения тела вокруг центра масс.

12. Задачи, содержащие вращающиеся блоки

<u>Дано:</u> m_1, m_2, k, m, R – радиус цилиндрического блока.
Нить невесомая, нерастяжимая, не проскальзывает по блоку.
Нет трения в оси блока.

w–? $A_{тр}(t) - ?$



1. <u>Ускорение.</u>

Уравнения для трех тел + нити:

$$\begin{cases} m_1\vec{w}_1 = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{H1} + \vec{F}_{тр1}; \\ F_{тр1} = kN_1; \\ m_2\vec{w}_2 = m_2\vec{g} + \vec{F}_{H2}; \\ 0 = \vec{F}'_{H1} + \vec{F}'_{H2} + \vec{F}'_{тр} \leftarrow \textit{невесомость нити}; \\ |\vec{w}_1| = |\vec{w}_2| = w \leftarrow \textit{нерастяжимость нити}; \\ \vec{F}_{H1} = -\vec{F}'_{H1}; \vec{F}_{H2} = -\vec{F}'_{H2};\ \vec{F}_{тр} = -\vec{F}'_{тр}; \\ I\cdot\beta = F_{тр}\cdot R \leftarrow \textit{отсутствие трения в блоке}; \\ w_1 = w_2 = w = \beta\cdot R \leftarrow \textit{отсутствие проскальзывания}; \\ I_C = \dfrac{mR^2}{2} \leftarrow \textit{цилиндрический блок}. \end{cases}$$

В проекциях на ось *x:*

$$\begin{cases} m_1 w = F_{H1} - km_1 g; \\ m_2 w = m_2 g - F_{H2}; \\ 0 = F'_{H2} - F'_{H1} - F'_{тр} \rightarrow F_{тр} = F_{H2} - F_{H1}. \end{cases}$$

Сложив первое и второе уравнения системы, получим:

$$(m_1 + m_2)w = m_2 g - F_{тр} - km_1 g;$$

$$\frac{mR^2}{2}\cdot\frac{w}{R} = F_{тр}R \Rightarrow F_{тр} = \frac{mw}{2};$$

$$w = g\frac{m_2 - km_1}{m_1 + m_2 + \dfrac{m}{2}}.$$

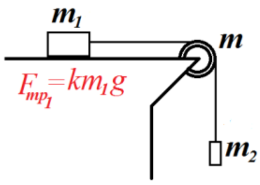
2. <u>Структура формулы ускорения:</u>

$$w = \frac{\textit{Ускоряющ. сила, приводящая к поступат. движ., – сила, противод. поступат. движ.}}{\sum m, \textit{участвующ. в поступат. движ.,} + \dfrac{I}{R^2}}.$$

Здесь $\dfrac{I}{R^2}$ – *эффективная масса, участвующая во вращательном движении.*

По этой формуле, отражающей физический смысл полученного выражения для ускорения системы, можем найти ускорения систем с различными блоками и комбинацией движущихся тел.

а) Ускорение системы тел при наличии кольцевого блока:

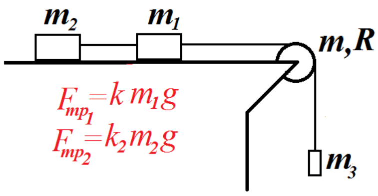


$$w = g\frac{m_2 - km_1}{m_1 + m_2 + m}.$$

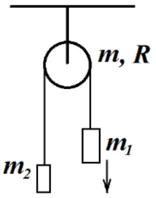
б) Ускорение системы тел при наличии шарообразного блока с проточкой для нити:

$$w = g\frac{m_2 - km_1}{m_1 + m_2 + \frac{2}{5}m}.$$

в) Ускорение для системы из трех тел с цилиндрическим блоком:



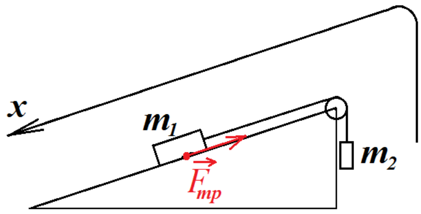
$$w = g\frac{m_3 - k_2m_2 - k_1m_1}{m_1 + m_2 + m_3 + \frac{m}{2}}.$$



д) Для двух тел на блоке:

$$w = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}.$$

е) Для двух тел на наклонной плоскости:



$$w = g\frac{m_1 \cdot \sin\alpha - m_2 - k \cdot m_1 \cdot \cos\alpha}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}.$$

<u>Замечание.</u> Необходимо отметить, что умение находить ускорение подобных систем, руководствуясь физическим анализом процесса, тем не менее не освобождает от необходимости уметь правильно формулировать и проецировать на выбранные оси уравнения динамики данной системы, но лишь облегчает процесс их решения и получения правильного результата.

3. <u>Работа сил трения.</u>

<u>Вопрос.</u> Какие силы трения существуют?

<u>Ответ.</u> Приложенная к телу m_1 сила трения $\vec{F}_{тр1}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$ между нитью и блоком.

<u>Вопрос.</u> Совершает ли каждая из них работу?

<u>Ответ.</u> Сила трения, приложенная к телу m_1, $\vec{F}_{тр1} = \vec{e}_x k m_1 g$ совершает работу.

$\vec{F}_{тр}$, приложенная к блоку, не совершает работу, так как важна относительная скорость трущихся частей, а она равна 0, так как скорость нити относительно блока равна 0, поскольку нить не проскальзывает.

$P = \vec{F}_{тр} \cdot 0 = 0$ – мощность $\vec{F}_{тр}$.

скорость точки приложения силы

Работа силы трения $\vec{F}_{тр1}$: $A_{тр} = -\int_1^2 k m_1 g \cdot ds = -k m_1 g \cdot S = -\frac{k m_1 g^2}{2} \cdot \frac{m_2 - k m_1}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} t^2.$

13. Задачи на плоское движение твёрдых тел

$\underbrace{m, R}_{цилиндр},$

Дано: $k -$ *коэффициент трения,*

$\alpha -$ *угол,* $h -$ *высота наклонной плоскости,*

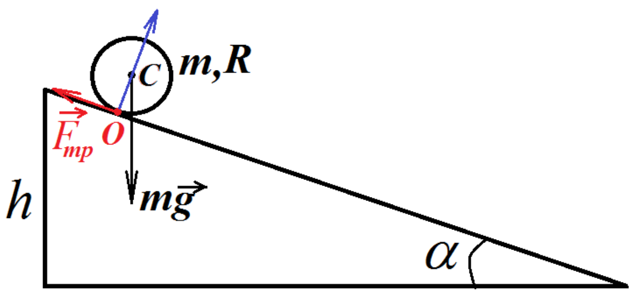
цилиндр скатывается без проскальзывания.

$w - ?\ \ \dfrac{T_{вр}}{T_c} - ?\ F_{тр} - ?$

$\alpha_{\max} -$ *максимальный угол, при котором тело катится без проскальзывания?*

1. Ускорение.

Уравнения динамики:



$$\begin{cases} m\vec{w}_c = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} \\ I_C \cdot \beta = F_{тр} \cdot R \end{cases};$$

Проецируем на ось y:
$N = mg \cdot \cos\alpha$.

Проецируем на ось x:

$$\begin{cases} mw_c = mg \cdot \sin\alpha - F_{тр} \\ \dfrac{mR^2}{2} \cdot \dfrac{w_c}{R} = F_{тр} \cdot R \end{cases};$$

$w_c = g\dfrac{m \cdot \sin\alpha}{m + \dfrac{m}{2}} = \dfrac{2}{3} g \cdot \sin\alpha\ -$ *ускорение центра масс цилиндра.*

2. Структура формулы для нахождения ускорения центра масс w_c.

Полная аналогия с задачами предыдущего параграфа.

$$w_c = \frac{сила,\ которая\ разгоняет}{m,\ которая\ движется\ поступательно,\ +\ эфф.\ m,\ кот.\ раскручивается = \dfrac{I_c}{R^2}}.$$

а) Если катится шар, то $w_c = g\dfrac{m \cdot \sin\alpha}{m + \dfrac{2}{5}m} = \dfrac{5}{7} g \cdot \sin\alpha$.

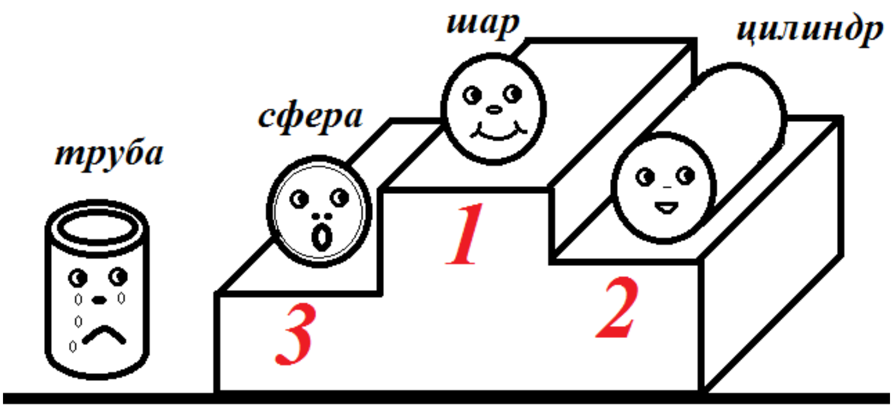
б) Если катится полый цилиндр, то $w_c = g\dfrac{m \cdot \sin\alpha}{m + m} = \dfrac{1}{2} g \cdot \sin\alpha$.

в) Если катится сфера, то $w_c = g\dfrac{m \cdot \sin\alpha}{m + \dfrac{2}{3}m} = \dfrac{3}{5} g \cdot \sin\alpha$.

<u>Выводы.</u>

1) Полые тела скатываются медленнее, чем сплошные.

2) Ускорение при скатывании не зависит от размеров и масс тел, а только от характера распределения массы относительно центра масс. Чем компактнее (ближе к оси вращения) распределена масса относительно центра масс, тем быстрее это тело будет скатываться.



2а) Полученную общую формулу ускорения центра масс можно вывести другим способом, если речь идёт только о скатывающихся телах.

Мгновенная ось вращения проходит через точку O – точку касания тела и плоскости.

В этом случае, поскольку точка O принадлежит Ц-системе скатывающегося тела, то можно написать уравнение вращательного движения тела относительно мгновенной оси вращения, не учитывая момент поступательной силы инерции.

<u>Вопрос.</u> Почему?

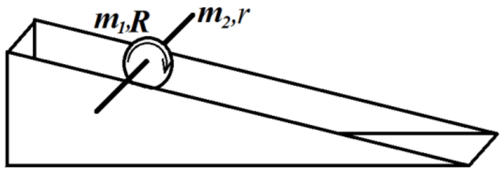
<u>Ответ.</u> В Ц-системе момент импульса твёрдого тела инвариантен относительно точки отсчета. Поступательная сила инерции приложена к центру масс тела и, следовательно, не может изменить момент импульса тела относительно точки C – центра масс, так как относительно точки C её плечо равно 0. Поэтому поступательная сила инерции, равная $-m\vec{w}_c$, не изменяет момента импульса тела относительно мгновенной оси вращения, двигающейся со скоростью центра масс.

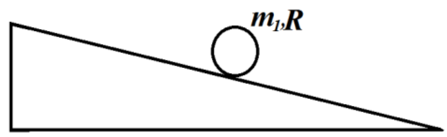
При таком рассмотрении вращательный момент относительно точки O создаёт сила $m\vec{g}$.

$$\begin{cases} I_0 = I_c + m \cdot r_0^2 \\ w_c = \beta \cdot r_0 \\ I_0 \cdot \beta = mg \cdot \sin\alpha \cdot r_0 \end{cases} \Rightarrow w_c = \frac{g \cdot \sin\alpha}{1 + \dfrac{I_c}{m \cdot r_o^2}}.$$

Здесь r_0 – *расстояние от центра масс до мгновенной оси вращения = радиус качения.* В данном случае $r_0 = R$.

Вопрос. Быстро или медленно будет скатываться по рельсам колесо на оси (маховик)?





Для маховика m_1 на оси m_2: $I_c = \frac{m_1R^2}{2} + \frac{m_2r^2}{2} \cong \frac{m_1R^2}{2} \Rightarrow w_{c1} = \frac{g \cdot \sin\alpha}{1 + \frac{I_c}{m_1 \cdot r^2}} \cong \frac{g \cdot \sin\alpha}{1 + \frac{R^2}{2r^2}}$.

Ответ. Для маховика на оси, катящегося по наклонным рельсам, ускорение центра масс w_{c1} будет много меньше, чем ускорение w_{c2} такого же маховика, скатывающегося с наклонной плоскости с таким же углом α, $w_{c2} \cong \frac{2g \cdot \sin\alpha}{3} >> w_{c1}$.

3. Сила трения.

Максимально возможная сила трения $F_{тр\max} = kmg \cdot \cos\alpha$.

В данном случае для цилиндра, катящегося без проскальзывания,

$F_{тр} = \frac{mw_c}{2} = \frac{m}{2} \cdot \frac{2}{3} g \cdot \sin\alpha = \frac{I_c \cdot w_c}{R^2}$.

Полученная сила трения не может превосходить максимальную:

$0 \le F_{тр} \le F_{тр\max} = kmg \cdot \cos\alpha$.

При качении $F_{тр}$ устанавливается такой, чтобы не было скольжения. Если для этого нужна сила трения $F_{тр} > kmg \cdot \cos\alpha$, то будет иметь место проскальзывание, так как сила трения будет не в состоянии удержать точку O тела в состоянии покоя. В общем случае:

$$F_{тр} = \frac{I_c w_c}{r_0^2} = \frac{I_c}{r_0^2} \cdot \frac{g \cdot \sin\alpha}{1 + \frac{I_c}{mr_0^2}} = \frac{mg \cdot \sin\alpha}{\frac{mr_0^2}{I_c} + 1} \le kmg \cdot \cos\alpha .$$

Отсюда следует *условие скатывания тела без проскальзывания*: $tg\alpha \le (1 + \frac{mr_0^2}{I_c})k$.

4. Энергия.

Вопрос. Будет ли сохраняться энергия?

Ответ. Да, так как сила трения приложена к точке, которая принадлежит мгновенной оси вращения, $V_0 = 0 \Rightarrow \vec{F}_{тр} \cdot \vec{V}_0 = 0 = P_{тр} \Rightarrow A_{тр} = 0 \Rightarrow E_0 = const$.

В верхней точке: $E_1 = mgh = E_2 = \frac{I_0\omega^2}{2} = \frac{(mr_0^2 + I_c)\omega^2}{2} = \underbrace{\frac{mr_0^2\omega^2}{2}}_{\text{эн.движенияц.масс}} + \underbrace{\frac{I_c\omega^2}{2}}_{\text{эн.вращотнос.ц.масс}} \Rightarrow$

$\frac{T_{вр}}{T_c} = \frac{I_c}{mr_0^2}$.

Распределение энергии между поступательным и вращательным движением $\frac{T_{вр}}{T_c} = \frac{I_c}{mr_0^2}$.

а) Для цилиндра:

$$r_0 = R; \qquad I_c = \frac{mR^2}{2};$$

$$T_c = \frac{mR^2\omega^2}{2}; \quad T_{вр} = \frac{mR^2\omega^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_{вр}}{T_c} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$T_c = \frac{2}{3}mgh; \quad T_{вр} = \frac{1}{3}mgh.$$

б) Для шара:

$$r_0 = R; \qquad I_c = \frac{2mR^2}{5};$$

$$T_c = \frac{mR^2\omega^2}{2}; \quad T_{вр} = \frac{mR^2\omega^2}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_{вр}}{T_c} = \frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$T_c = \frac{5}{7}mgh; \quad T_{вр} = \frac{2}{7}mgh.$$

Аналогично для полых цилиндров и шаров.

Тело	w_c	$\frac{T_{вр}}{T_c}$	$T_{вр}$	T_c
Цилиндр	$g \cdot \sin\alpha \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}mgh$	$\frac{2}{3}mgh$
Полый цилиндр	$g \cdot \sin\alpha \cdot \frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}mgh$	$\frac{1}{2}mgh$
Шар	$g \cdot \sin\alpha \cdot \frac{5}{7}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{7}mgh$	$\frac{5}{7}mgh$
Сфера	$g \cdot \sin\alpha \cdot \frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}mgh$	$\frac{3}{5}mgh$

Выводы.

1) *Чем большая масса сосредоточена на периферии, тем больше доля* $T_{вр}$.

2) $\frac{T_{вр}}{T_c} = \frac{I_c}{mr_0^2}$ *(те же коэффициенты, что и в моменте инерции тел).*

14. Свободные оси. Главные оси

Опред. *Ось вращения, направление которой в пространстве остаётся неизменным без действия на неё внешних сил, называется свободной осью тела.*

В теории доказано, что *для любого твёрдого тела существуют три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс, которые могут служить свободными осями. Они называются главными осями.*

Итак, *главные оси – три свободные оси, проходящие через центр масс тела.*

Нахождение главных осей для тела производной формы – сложная задача.

Для параллелепипеда: главные оси – оси, проходящие через центры противоположных граней.

Для шара: главные оси – любые три оси, проходящие через центр масс.

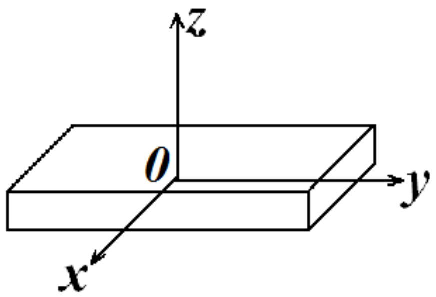
Для цилиндра: главными осями являются ось цилиндра z и любые две оси, перпендикулярные оси z и перпендикулярные между собой.

Моменты инерции тела относительно главных осей называются главными моментами инерции.

При вращении вокруг главных осей $\vec{M}_o = I\vec{\omega}$ *и не зависит от выбора точки O, относительно которой его определяют.*

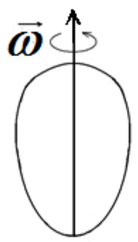
Вращение тела вокруг главных осей с max и min моментами инерции является устойчивым, а с промежуточным – нет.

Примеры:

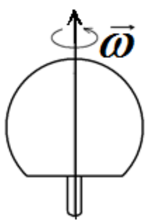


1. Подбрасываем и закручиваем параллелепипед (спичечный коробок).

$I_z > I_x > I_y \Rightarrow$ вокруг осей y, z коробок крутится устойчиво, а вокруг оси x – нет.



2. Колумбово яйцо стремится иметь $I_{\min}$ при вращении вокруг собственной оси, в результате чего «встает» в процессе вращения.



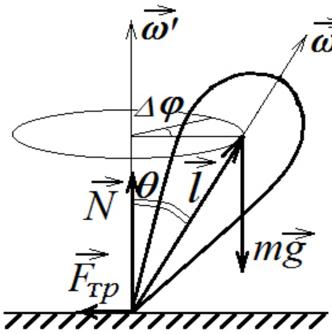
3. В ряде случаев для устойчивого вращения бывает важна ориентация тела относительно оси: так вращающийся китайский волчок встает на ножку.

15. Гироскопы

<u>Опред.</u> *Массивные осесимметричные тела, вращающиеся вокруг своей оси с большой угловой скоростью, называются гироскопами.*

Рассмотрим динамику движения гироскопа.

$\vec{M}_0 = I\vec{\omega}$ – собственный момент импульса.



$\vec{N}_0 = \left[\vec{l}, m\vec{g}\right] = \dfrac{d\vec{M}_0}{dt}$ – момент силы тяжести относительно точки опоры O.

$\left|d\vec{M}_0\right| = M_0 \sin\theta \cdot d\varphi'$;

$$d\vec{M}_0 \to \begin{cases} \perp \vec{M}_0 \\ \perp OO' \end{cases} \Rightarrow \frac{d\vec{M}_0}{dt} = \left[\vec{\omega}', \vec{M}_0\right] = \left[\vec{l}, m\vec{g}\right];$$

$$\begin{cases} \omega' M_0 \sin\theta = mgl\sin\theta \\ M_0 = I\omega \end{cases} \Rightarrow \omega' = \frac{mgl}{I\omega} \text{ – } \textit{угловая скорость прецессии гироскопа}.$$

Обратите внимание на то, что $\vec{\omega}' \uparrow\downarrow m\vec{g}$, то есть угловая скорость прецессии антипараллельна силе, создающей момент относительно неподвижной точки.

В общем случае, когда такой силой является не $m\vec{g}$, а сила $\vec{F}$, *угловая скорость прецессии гироскопа:*

$$\vec{\Omega} = -\frac{\vec{F}a}{I_{\uparrow\uparrow}\omega_{\uparrow}},$$

где a *– расстояние от точки опоры до точки приложения силы* $\vec{F}$*, вызывающей прецессию,* $I_{\uparrow\uparrow}$ *– момент инерции тела относительно его оси симметрии,* $\omega_{\uparrow}$ *– проекция угловой скорости на ось вращения (*$\omega_{\uparrow} > 0$ *при вращении против часовой стрелки,* $\omega_{\uparrow} < 0$ *при вращении по часовой стрелке).*

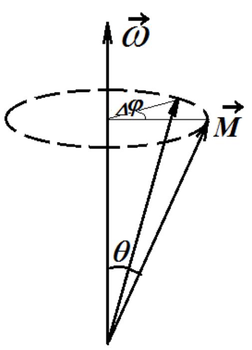
<u>Вопрос.</u> Сила трения удерживает основание нашего гироскопа. А как будет вести себя гироскоп, если его поместить на гладкую поверхность с пренебрежимо малой силой трения?

<u>Ответ.</u> Проекция центра масс на плоскость опоры будет неподвижна, а точка опоры гироскопа будет описывать окружность с радиусом $R = l\sin\theta$.

Все явления, обусловленные быстрым вращением гироскопа, называются гироскопическими.

<u>Вопрос.</u> Так что же такое быстрое вращение?

16. Условие гироскопичности $\omega' << \omega$



<u>Вопрос.</u> Где в выводе используется условие $\omega' << \omega$?

<u>Ответ</u>. Мы считали, что в любой момент вращения

$$\vec{M} = \vec{M}_0 = I\vec{\omega},$$

но в действительности $\vec{M}_0 = I\vec{\omega} + \Delta\vec{M}$.

$\Delta\vec{M}$ – добавка, связанная с прецессией, то есть вращением относительно оси OO'.

Условие гироскопичности имеет прозрачный физический смысл:

$$\frac{mgl}{I\omega} << \omega \Rightarrow mgl << I\omega^2,$$

а именно потенциальная энергия тела относительно точки опоры гораздо меньше кинетической энергии вращения вокруг собственной оси.

Условие гироскопичности тела: $\omega >> \sqrt{\dfrac{mgl}{I}}$.

Основное свойство прецессии – безынерционность.

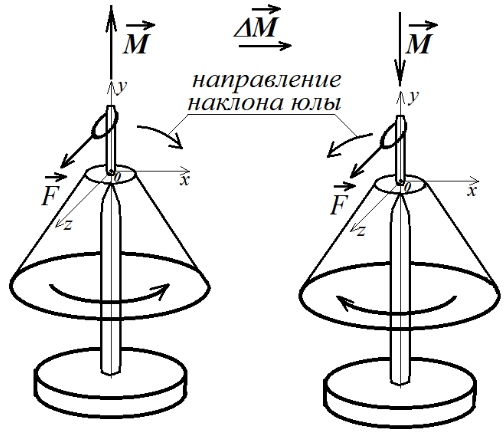
Прецессия не обладает инерцией, так как момент $\vec{F}$ определяет собой угловую скорость прецессии ω', а не ускорение, поэтому устранение $\vec{F}$ приводит к мгновенному исчезновению прецессии.

17. Гироскопические эффекты

Опред. *Гироскопические эффекты – это явления, обусловленные быстрым вращением гироскопа.*

1) *Перемещение перпендикулярно действию силы.*

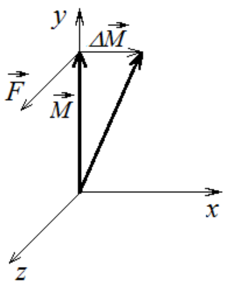
а) Юла Максвелла на аркане. Юла Максвелла – волчок, точка опоры которого расположена выше центра тяжести, благодаря чему нераскрученный волчок сохраняет вертикальное положение оси. Если надеть на ось покоящегося волчка проволочную петлю с привязанной к ней ниткой (аркан) и потянуть за нитку, то верхний конец оси юлы отклонится вслед за нитью. Такое же воздействие на ось вращающегося волчка приводит к парадоксальному результату: конец оси смещается перпендикулярно нити. Если привести в соприкосновение ось раскрученной юлы с проволочным каркасом, то под действием силы реакции опоры, действующей на юлу, со стороны каркаса юла начинает «бегать» по каркасу.



Если юла покоится, то $\vec{N}_0 = \left[\vec{r}, \vec{F}\right] = \dfrac{\Delta\vec{M}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta M}{\Delta t}\vec{e}_x$ – это поворот вокруг оси x.

Если юла вращается, то $\Delta\vec{M} = \Delta M\vec{e}_x \Rightarrow \vec{M}_2 = \vec{M}_1 + \Delta\vec{M} \Rightarrow$

ось волчка поворачивается вокруг оси z $\Rightarrow$ происходит прецессия в направлении, перпендикулярном направлению действия силы.



б) Тот же эффект наблюдается при огибании осью волчка проволочного каркаса.

$$\left[\vec{r}, \vec{F}_R\right] = \vec{N}, \quad \uparrow\uparrow \Delta\vec{M} \quad \text{волчка.}$$

Это момент силы реакции опоры, возникающей при взаимодействии волчка с проволочным каркасом.

Ось волчка хочет повернуться вокруг направления $\left(-\vec{F}\right)$, и волчок едет по каркасу.

2) *Устойчивость ориентации оси гироскопа.*

$$\left|\vec{M}\right| >> \left|\Delta\vec{M}\right| \to \vec{M} \approx const.$$

На все внешние воздействия система отвечает таким изменением, которое стремится ослабить это воздействие (принцип Ле Шателье), – это отрицательная обратная связь. Она является залогом устойчивости системы, и притом не только физической.

Примеры

1. Велосипед с раскрученным гироскопом устойчиво едет даже по качающейся проволоке.
2. Использование гироскопов как стабилизаторов:
   - снаряд без вращения кувыркается;
   - гиростабилизаторы движения: гироскопы используются для сохранения устойчивой ориентации космической станции на орбите (гиродин).

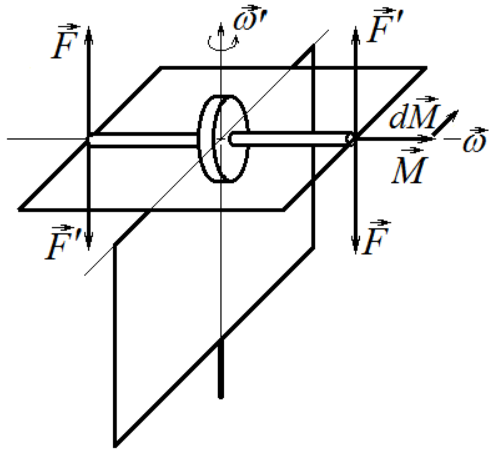
3) *Существование нутаций – небольшого, но быстрого колебания оси около её среднего положения.*

4) *Гироскопические силы.*

При попытке вызвать поворот оси гироскопа заданным образом вследствие гироскопических эффектов возникают гироскопические силы, действующие на подшипники, в которых вращается гироскоп.

Гироскопические силы зависят от момента импульса гироскопа.

Гироскоп в карданном подвесе имеет три степени свободы и может вращаться вокруг трёх осей.



Если раскрутить гироскоп с угловой скоростью ω, то наблюдается его прецессия с угловой скоростью ω'.

На рисунке представлено мгновенное изменение момента импульса гироскопа $d\vec{M} = dt[\vec{r}, \vec{F}]$, которое соответствует его прецессии с угловой скоростью $\vec{\omega}'$.

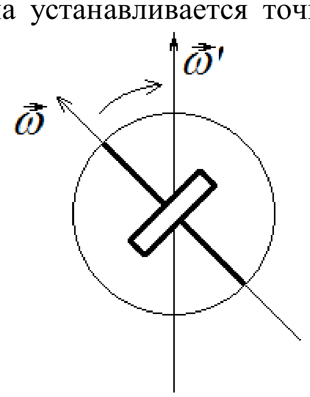
На ось гироскопа будет действовать пара сил $\vec{F}$, а на подшипники со стороны оси по третьему закону Ньютона будет действовать пара сил $\vec{F}' = -\vec{F}$. Эти силы, то есть силы, с которыми ось ротора давит на подшипники, и называются гироскопическими. Их надо учитывать в инженерных расчётах.

Если установить гироскоп на платформе и долго вращать платформу в одну сторону, то ось гироскопа медленно повернётся и установится вдоль оси вращения платформы.

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{N}_{гир.\ сил} = \left[\vec{M}, \vec{\omega}'\right] = I\left[\vec{\omega}, \vec{\omega}'\right].$$

Если $\vec{\omega} \uparrow\uparrow \vec{\omega}'$, то $\vec{N}_{гир.\ сил} = 0$.

Использование гироскопических сил в гирокомпасе, гиростабилизаторе основано на этом принципе. За счёт вращения Земли ось гироскопа устанавливается точно в меридианальной плоскости, указывая точно на север.



III. Специальная теория относительности (СТО)

1. Основные предпосылки возникновения СТО

К концу XIX в. в физике сложилась следующая картина научных достижений.

1. Согласованная, хорошо развитая, без каких-либо внутренних противоречий механика, в основе которой лежали:
– принцип относительности Галилея;
– преобразования Галилея;
– законы Ньютона, инвариантные относительно преобразований Галилея, согласованные с принципом относительности Галилея.

2. Получившие своё развитие в XIX в. электродинамика и оптика, основой которых являлись предложенные в 60-х гг. Д. К. Максвеллом уравнения электромагнитного поля.

Парадокс заключался в том, что уравнения Максвелла оказались не инвариантны относительно преобразований Галилея, а значит, нарушали принцип относительности, то есть принцип эквивалентности всех инерциальных систем друг другу. Действительно, если уравнения электромагнитного поля имеют различный вид в разных инерциальных системах в зависимости от скорости их движения, то с помощью электромагнитных и оптических явлений можно отличить одну систему от другой и обнаружить её движение. Следует отметить, что уравнения электромагнитного поля Максвелл написал для вполне определённой системы отсчёта, связанной с мировым эфиром, которым, как считалось, заполнено мировое пространство. Популярная в то время гипотеза мирового эфира рассматривала его как среду – носителя электромагнитного поля (электромагнитных волн, в частности света).

Указанный парадокс мог иметь 3 возможных объяснения.

1) Новые уравнения электромагнитного поля неверны, а с механикой всё в порядке. Сначала именно так и думали.

2) Верны уравнения электромагнитного поля, а принцип относительности и преобразования Галилея надо исправить.

Об этом всерьёз задумались после экспериментального доказательства существования электромагнитных волн Г. Герцем в 1886–1889 гг., наличие и закон распространения которых следуют непосредственно из системы уравнений Максвелла. Г. Герц, исследуя электромагнитные волны в пустоте, доказал, что скорость их распространения равна скорости света. Когда же А. С. Попов в 1895 г. изобрёл радиосвязь, используя электромагнитные волны в дециметровом и метровом диапазоне, это помогло спасти много жизней в ряде морских катастроф (броненосец «Генерал-адмирал Апраксин», «Титаник», и т.д.), сомнений в правильности уравнений Максвелла не осталось.

А. Пуанкаре в 1904 г. высказал предположение о возможности распространения принципа относительности на электромагнитные явления: «Законы природы должны быть одинаковы как для неподвижного наблюдателя, так и для наблюдателя, находящегося в состоянии равномерного и прямолинейного движения, так что не существует и не может существовать способа обнаружить, находимся мы в состоянии такого движения или нет».

Г. Лоренц нашёл и опубликовал в 1904 г. преобразования, использование которых оставляло уравнения электромагнитного поля инвариантными в различных инерциальных системах отсчёта, и ввёл понятие собственного времени в движущейся системе отсчёта t':

$$\begin{cases} x' = \dfrac{(x - V\,t)}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z; \\ t' = \dfrac{(t - \dfrac{xV}{c^2})}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \end{cases}$$ для случая движения системы со скоростью V вдоль оси x.

3) Вообще говоря, могло существовать и такое решение проблемы:

«В механике верны преобразования и принцип Галилея, а в электродинамике – уравнения Максвелла, и с точки зрения электромагнетизма существует выделенная инерциальная система отсчета (ИСО), связанная с мировым эфиром».

Но такое решение вопроса создавало непреодолимые препятствия на пути создания общей теории поля, включающей в себя единый подход ко всем силовым взаимодействиям, и, кроме того, противоречило результатам опыта Майкельсона–Морли по обнаружению мирового эфира.

Опыты, проведённые в 1881 и 1887 гг. с помощью интерферометра Майкельсона, должны были выявить разность оптической длины пути двух лучей, равную 0.125 мкм, которая должна была возникнуть вследствие движения Земли вокруг Солнца со скоростью 30 км/с относительно неподвижного эфира. Эта разность не была обнаружена, но она и не равнялась 0. В опытах Майкельсона и его последователей наблюдался эффект однонаправленного смещения интерференционной картины, что было истолковано автором как систематическая погрешность, на фоне которой ожидаемое периодическое смещение полос было незаметно: «Тем самым было показано, что гипотеза стационарного эфира не подтверждается, и следует сделать неизбежный вывод, что эта гипотеза ошибочна» [Michelson A.// Amer. J. Sci, 1881, 22, p. 120–129].

2. Постулаты СТО

СТО была опубликована А. Эйнштейном в работе «К электродинамике движущихся тел» в 1905 г. без ссылок на предшественников. Более точно отражающий смысл перевод слова *special – частная*, а не специальная, так как речь идёт о частном случае ИСО.

Постулаты Эйнштейна.

1) *Принцип относительности.*

Все физические законы протекают одинаковым образом во всех ИСО, все законы природы инвариантны относительно ИСО (А. Пуанкаре, 1904).

2) *Скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источника и одинакова во всех ИСО* (опыт Майкельсона–Морли).

Эйнштейн отказался от гипотезы эфира и существования выделенной системы отсчёта, с ним связанной. «Надо совершенно забыть об эфире и никогда о нём не вспоминать!» – говорил он.

Преобразования Лоренца для координат и времени в движущейся со скоростью V вдоль оси x системы были получены Эйнштейном следующим образом.

Пусть в момент времени $t=t'=0$ по часам, синхронизированным в неподвижной K- и K'-системах, их начала координат O и O' совпадают. В этот момент из начала координат систем была испущена сферическая световая волна, которая будет иметь вид:

$$\begin{cases} (K) \quad x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \\ (K') \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \end{cases} \qquad (1)$$

Нужно найти связь координат *K*- и *K′*-системы, а также времён t и t' прихода сигнала в этих системах в определенную точку пространства.

Так как уравнения преобразования должны сохранять однородность пространства и времени, то:

1) уравнения преобразования должны быть линейными;
2) поперечные к направлению движения координаты не должны изменяться.

Тогда:

$$\begin{cases} x' = a(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = bt + dx \end{cases} \qquad (2)$$

Вычтем из первого уравнения системы (1) второе уравнение этой системы и воспользуемся условиями системы (2):

$$x^2 + y^2 + z^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2t^2 - c^2t'^2;$$

$$-x^2 + c^2t^2 = -x'^2 + c^2t'^2 = const.$$

Заметим, что постоянство скорости света во всех системах отсчёта по всем направлениям даёт:

$$c^2\Delta t^2 - \underbrace{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)}_{\Delta\vec{r}^{\,2}} = const = S^2;$$

$$in\,\mathrm{var} = S = \sqrt{c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{r}^{\,2}}.$$

$S = \sqrt{c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{r}^{\,2}}$ *называется интервалом и является релятивистским инвариантом.*

(1) + (2) даёт:
$$\begin{cases} x' = a(x - Vt) \\ t' = bt + dx \\ c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 \end{cases} \qquad (3)$$

Это система из трех уравнений с тремя неизвестными a, b, d.

Преобразуем первые два уравнения системы (3), возводя каждое из них в квадрат и умножив затем первое уравнение на (–1), а второе – на c^2. В результате получим:

$$\begin{cases} -x'^2 = -a^2(x - Vt)^2 \\ c^2t'^2 = c^2(bt + dx)^2 \\ c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 \end{cases} \qquad (4)$$

Сложим первые два уравнения системы (4), производя возведение в квадрат и исключив из полученного равенства переменные t', x', воспользовавшись третьим уравнением:

$$-a^2(x^2 - 2Vtx + V^2t^2) + c^2(b^2t^2 + 2bdtx + d^2x^2) = c^2t^2 - x^2.$$

Это уравнение должно выполняться при любых t, x, но это возможно только при условии равенства нулю каждого из коэффициентов при tx, x^2, t^2. Группируя члены уравнения и приравнивая каждый из коэффициентов 0, получим систему уравнений для нахождения a, b, d:

$$\begin{cases} -a^2+c^2d^2=-1 \\ a^2 2V+c^2 2bd=0 \to a^2+c^2\dfrac{bd}{V}=0 \\ -a^2V^2+c^2b^2=c^2 \end{cases} \qquad (5)$$

Подстановка $a^2=-\dfrac{bdc^2}{V}$ в первое и третье уравнения системы (5) даёт:

$$\begin{cases} \dfrac{bdc^2}{V}+d^2c^2=-1 \\ bdc^2V+b^2c^2=c^2 \to bdV+b^2=1 \end{cases} \qquad (6)$$

После сложения полученных уравнений получаем

$$bd\frac{c^2}{V}+d^2c^2+bdV+b^2=0 \Rightarrow (\frac{c^2}{V}d+b)(dV+b)=0.$$

Находим два соотношения: $d_1=-\dfrac{bV}{c^2}$; $d_2=-\dfrac{b}{V}$.

d_2 не годится, так как при подстановке в уравнение $bdV+b^2=1$ получаем

$$\frac{-b^2}{V}V+b^2=0\neq 1.$$

Подстановка d_1 в уравнение $bdV+b^2=1$ позволяет найти неизвестные коэффициенты:

$$\begin{cases} b=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}=a \\ d=\dfrac{-\dfrac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \end{cases}.$$

Таким образом, получаем связь координат и времени события в штрихованной K'-системе, двигающейся относительно K-системы со скоростью $\vec{V}$ вдоль оси x, с координатами и временем этого события в K-системе (преобразования Лоренца):

$$\begin{cases} x'=\dfrac{x-Vt}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=\dfrac{t-\dfrac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \end{cases}.$$

То есть событие прихода сигнала в K'-системе в точку A имеет не только отличную от K-системы координату по оси x, что вполне естественно, так как K'-система движется, но и время измерения по часам K'-системы будет иным, чем в K-системе.

Иногда для сокращения записи будут использоваться следующие обозначения:

$$\frac{V}{c} = \beta; \qquad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \gamma.$$

Тогда преобразования Лоренца примут вид:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt) = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{\beta x}{c}\right) = \dfrac{t - \frac{\beta x}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}.$$

Преобразования Лоренца для координат и времени движущихся друг относительно друга со скоростью $V\vec{e}_x$ инерциальных систем отсчета дополняют собой два названных выше постулата Эйнштейна, являясь третьим основным компонентом СТО.

3. Следствия СТО

1) Замедление времени и увеличение длительности процессов в движущихся системах.

Пусть в неподвижной K-системе в начале координат (или любой другой точке с координатами x_0, y_0, z_0) в течение времени Δt_0 происходит какой-либо процесс. Какое время $\Delta t'$ будет соответствовать этому процессу в K'-системе?

В соответствии с преобразованиями Лоренца:

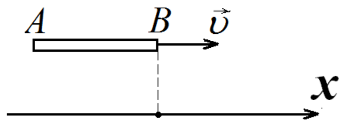
$$\Delta t' = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ *– собственное время минимально!*

То есть длительность процесса в движущейся системе увеличивается. Это явление не вполне удачно называется замедлением времени в движущихся системах. В самом деле, если в движущихся системах для протекания одного и того же процесса требуется тем больше времени, чем быстрее движется система, то, следовательно, время в движущихся системах летит быстрее, чем в неподвижной или собственной для данного явления системе. Так что этот эффект надо было бы назвать не замедлением, а ускорением времени в движущихся системах или *замедлением времени в собственной системе отсчета*.

Эффект изменения времени является взаимным, то есть с точки зрения K'-системы длительность того же процесса больше в K-системе, то есть эффект замедления времени является чисто кинематическим, он не связан с изменением свойств часов, обусловленным их движением.

Экспериментальным подтверждением эффекта увеличения длительности процессов в движущейся системе считается прохождение мюонами земной атмосферы. Нестабильные элементарные частицы мюоны образуются в верхних слоях атмосферы на высоте 20–30 км, их собственное время жизни, то есть время в неподвижной относительно них системе отсчёта, порядка $2 \cdot 10^{-6}\,c$. По истечении этого времени они распадаются на электрон (или позитрон), нейтрино и антинейтрино. Очевидно, что, даже двигаясь со скоростью света, мюоны не могли бы пролететь более 600 метров и достичь поверхности Земли. Однако в космических лучах на уровне моря мюоны образуют основную компоненту $(\approx 80\%)$ всех частиц космического излучения. Этот факт удаётся объяснить увеличением собственного времени жизни мюонов в системе Земли, которая является для мюонов движущейся.

2) Лоренцево сокращение длины.



В 1892 г. Г. Лоренц, а ранее в 1889 г. Дж. Фиджеральд, заметил, что отрицательный результат опыта Майкельсона легко объясняется, если предположить, что продольные размеры всех тел сокращаются в движущихся системах в $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ раз. Это сокращение Лоренц объяснял изменением действующих в телах электромагнитных сил при движении тела через мировой эфир. Эйнштейн отверг существование эфира. В СТО это сокращение получается как кинематический эффект.

Пусть стержень АВ движется со скоростью V вдоль оси x K-системы.

Заметим по часам K-системы момент времени $t(B)$ и $t(A)$ прохождения концов A и B мимо часов, тогда длина стержня в K-системе:

$l = V[t(A) - t(B)] = V\Delta t$.

В K'-системе в соответствии с преобразованиями Лоренца этот интервал будет соответствовать $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Это $\Delta t'$ соответствует собственной длине стержня l_0, так как K'-система является для него родной системой, $l_0 = V \cdot \Delta t'$.

Отсюда получается:

$$l_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = l \quad \textit{– собственная длина максимальна!}$$

Лоренцево сокращение длины, как и замедление времени, взаимно. В СТО оно является чисто кинематическим эффектом, то есть в теле не возникает каких-либо эффектов, вызывающих деформацию, но форма движущегося тела кажется сплющенной в направлении движения.

3) Одновременность – понятие относительное.

Синхронизация часов в произвольной системе производится световыми сигналами следующим образом: из точки A в момент времени t_{A_0} излучается световой сигнал, который за время Δt_1 доходит до точки B и, отражаясь, возвращается в точку A за время Δt_2. Часы в точках A и B считаются синхронизированными, если в момент прихода сигнала в точку B часы в точке B показывают $t_B = t_{A_0} + \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{2} = t_{A_0} + \frac{l_{AB}}{c}$, где l_{AB} – расстояние между точками A и B в данной системе координат.

Проведя синхронизацию часов во всех точках K-системы, положим, что в этой системе произошли два события $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$, временной интервал между которыми в K-системе $\Delta t = t_2 - t_1$.

В K'-системе, движущейся вдоль оси x мимо *(K)* системы со скоростью V , в соответствии с преобразованиями Лоренца:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - (x_2 - x_1)\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Таким образом, *если события* P_1 *и* P_2 *были одновременными в K-системе, в K′-системе их одновременность теряется. В классической механике одновременность абсолютна.*

С точки зрения здравого смысла это положение СТО постоянно подвергается критике. Ответ Эйнштейна на это таков: «Здравый смысл – это толща предрассудков, успевших отложиться в нашем сознании к восемнадцати годам».

4) Преобразование скоростей.

Оставив прежним определение скорости, найдём $\vec{\upsilon}'(\upsilon'_x, \upsilon'_y, \upsilon'_z) = \upsilon'_x \vec{e}_{x'} + \upsilon'_y \vec{e}_{y'} + \upsilon'_z \vec{e}_{z'}$ частицы в K'-системе:

$$\begin{cases} \upsilon'_x = \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{dx'/dt}{dt'/dt} = \dfrac{\upsilon_x - V}{1 - \dfrac{\upsilon_x V}{c^2}} \\ \upsilon'_y = \dfrac{dy'}{dt'} = \dfrac{dy'/dt}{dt'/dt} = \dfrac{\upsilon_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \upsilon_x \cdot \dfrac{V}{c^2}} \\ \dfrac{dt'}{dt} = \dfrac{1 - \upsilon_x \cdot \dfrac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \upsilon'_z = \dfrac{\upsilon_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{\upsilon_x V}{c^2}} \end{cases}$$

Здесь V – скорость K'-системы и $\vec{\upsilon}' \neq \vec{\upsilon} - \vec{V}$ (как при преобразованиях Галилея).

За относительную скорость движения частиц принимается скорость движения одной частицы в системе другой, то есть в системе, где другая частица покоится.

При таком определении относительной скорости она никогда не превысит скорость света c, даже если сближающиеся частицы летят со скоростями, близкими к световым.

Это легко показать. Пусть частицы 1 и 2 двигаются навстречу друг другу со скоростями:

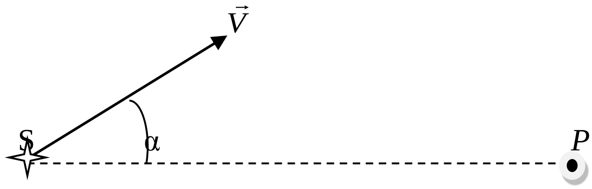
$\vec{\upsilon}_1 = \vec{e}_x (c - \alpha_1)$;

$\vec{\upsilon}_2 = -\vec{e}_x (c - \alpha_2)$.

Их относительная скорость равна скорости второй частицы в K'-системе, где $\upsilon'_1 = 0$:

$$|\vec{\upsilon}'_2| = \upsilon_{отн} = c \cdot \frac{2 - \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{c}}{2 - \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{c} + \dfrac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{c^2}}.$$

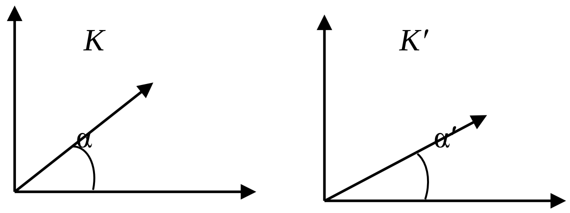
5) Эффект Доплера.



Частота ν, воспринимаемая приёмником P, отличается от частоты ν_0, испускаемой источником S, если источник движется со скоростью $\vec{V}$:

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\alpha}.$$

6) Преобразование углов (аберрация света).



$$tg\alpha = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x};$$

$$tg\alpha' = \frac{\sin\alpha\sqrt{1-\beta^2}}{\cos\alpha - \frac{V}{c}}.$$

Для светового луча при переходе из одной системы в другую изменяется только направление распространения:

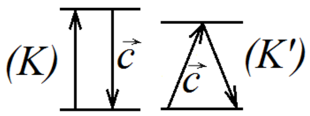
$$\cos\alpha' = \frac{\cos\alpha+\beta}{1+\beta\cos\alpha}.$$

4. Инварианты СТО

1) ***Скорость света** c **в вакууме** не зависит ни от скорости движения источника, ни от скорости системы.*

Вопрос. Что происходит со скоростью света c при переходе из одной системы в другую?

Ответ. Изменяется направление распространения света.



В СТО считается, что c – *предельная скорость распространения всех взаимодействий.*

СТО отвергает принцип дальнодействия классической механики, в соответствии с которым взаимодействия тел распространяются мгновенно.

2) ***Поперечные размеры тел** не изменяются при движении K′-системы вдоль оси x:*

$$\begin{cases} y' = y = in\,\mathrm{var}; \\ z' = z = in\,\mathrm{var}. \end{cases}$$

Следствием является сохранение одновременности событий, происходящих в точках, лежащих в плоскостях, перпендикулярных направлению движения систем, то есть в точках $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ и $P_2(x_1, y_2, z_2, t_1)$. Эти события в K'-системе будут иметь координаты $P_1(x_1', y_1, z_1, t_1')$ и $P_2(x_1', y_2, z_2, t_1')$ и останутся одновременными.

3) ***Интервал*** $S_{12}=\sqrt{c^2(\Delta t_{12})^2-(\Delta\vec{r}_{12})^2}=invar$ *между любыми событиями* P_1 *и* P_2 *постоянен в любой системе. СТО – теория событий.*

Вопрос. Каков физический смысл интервала, то есть что можно сказать о событиях P_1 и P_2, если $S_{12}=0$?

Ответ. $S_{12}=0$ *– это светоподобный интервал* $c\Delta t_{12}=\left|\Delta\vec{r}_{12}\right|$, то есть события P_1 и P_2 могут быть связаны световым сигналом.

Инвариантность интервала следует непосредственно из постоянства скорости света.

Если $S_{12}^2>0$*, то* S_{12} *– действительный времениподобный интервал.* События P_1 и P_2, разделённые времениподобным интервалом, не могут быть одновременными ни в какой системе координат, но существует K'-система, в которой они происходят в одной точке пространства.

Если $S_{12}^2\le 0$*, то* S_{12}*– мнимый интервал – это пространственноподобный интервал.* События P_1 и P_2, разделённые пространственноподобным интервалом, в любой системе координат происходят в разных точках пространства, но есть система, в которой они будут одновременными.

4) ***Причинность*** *– понятие абсолютное.*

Вопрос. Какие два события могут быть причинно связаны?

Ответ. Так как скорость распространения взаимодействий $\upsilon_{вз}\le c$, то чтобы P_1 и P_2 могли быть причинно связаны, надо чтобы они были разделены свето- или времениподобным интервалом, для которых $\left|\Delta\vec{r}_{12}\right|\le c\Delta t_{12}$. Тогда $\Delta\vec{r}_{12}^{\,2}-c^2\Delta t_{12}^2\le 0$, то есть $S_{12}^2\ge 0$, что соответствует свето- или времениподобному интервалу. В этом случае одно из этих событий может быть следствием другого.

Причинность событий можно наглядно продемонстрировать в системе координат Минковского.

В 1907 г. Г. Минковский ввёл четырёхмерное пространство событий, объединившее физическое трёхмерное пространство и время. Точка в пространстве Минсковского соответствует событию СТО и имеет координаты (x,y,z,ict).

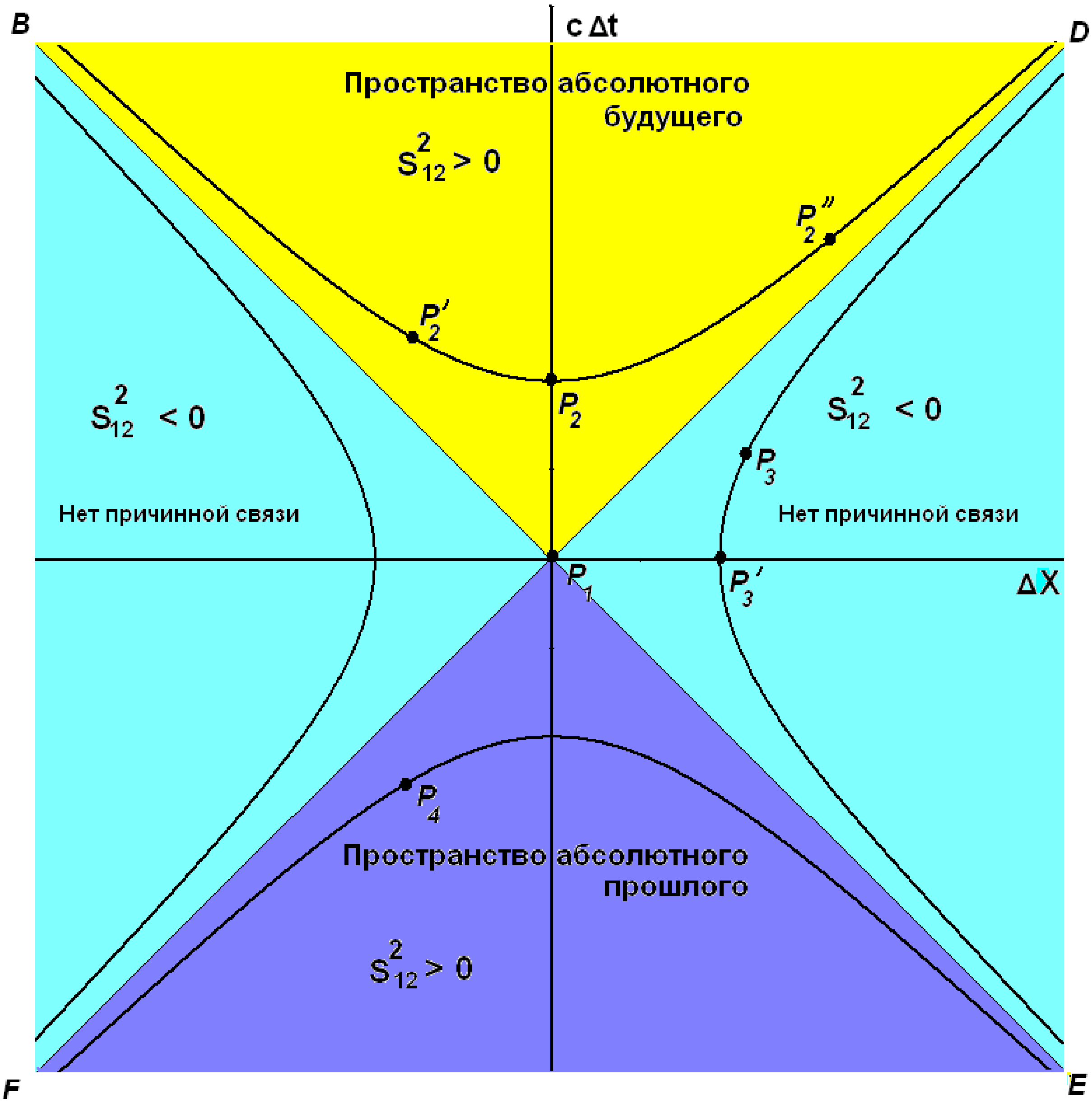
Четырёхмерный вектор преобразуется в соответствии с преобразованиями Лоренца. Квадрат четырёхмерного вектора равен

$$-S_{12}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2\,.$$

Исключим из рассмотрения координаты y,z, являющиеся релятивистскими инвариантами. Пусть событие P_1 произошло в точке, которую мы примем за начало координат.

Вопрос. Как узнать, являются ли события P_2,P_3,P_4 причинно связанными с P_1?

Ответ. Области BP_1D и FP_1E соответствуют времениподобным интервалам между событиями, поэтому события P_2 и P_4, принадлежащие этим областям, могут быть причинно связанными с событием P_1. При этом область BP_1D является пространством абсолютного будущего события для P_1, а область FP_1E – пространством абсолютного прошлого. Рассмотрение событий P_1 и P_2 в движущейся системе координат будет соответствовать перемещению точки P_2 по кривой BP_2D в точку P_2' или P_2'', в зависимости от скорости системы. Отрезок P_1P_2 соответствует собственному времени между событиями P_1 и P_2, происходящими в одной точке пространства.

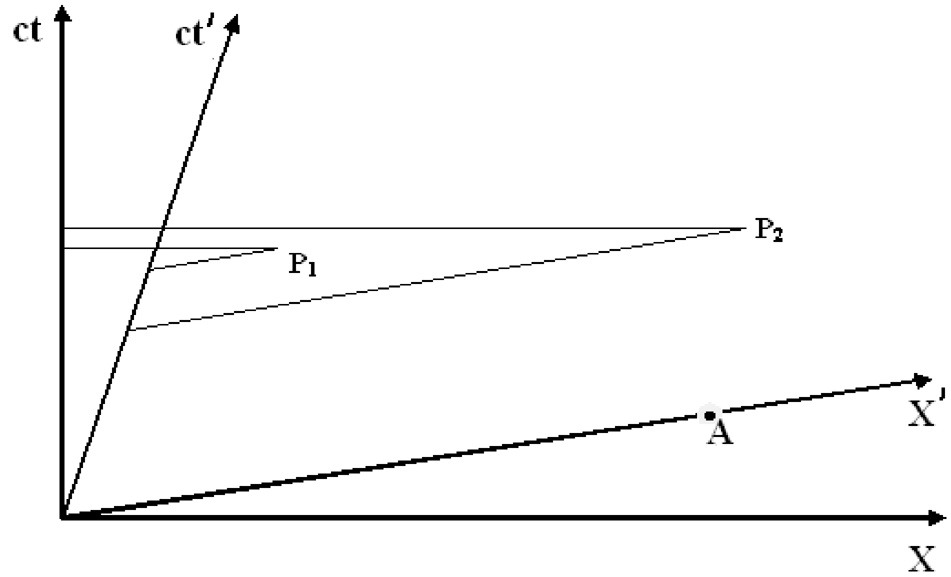


В областях BP_1F и DP_1E лежат события, не имеющие причинной связи с P_1. Отрезок P_1P_3' соответствует расстоянию между событиями в той системе, где они произошли одновременно.

Разделение событий на прошлое и будущее по отношению к P_1:

абсолютно для $S^2 > 0$,

относительно для $S^2 < 0$.



Геометрия Минковского позволяет наглядно интерпретировать и другие эффекты СТО. Движение со скоростью V K'-системы вдоль оси x K-системы приводит к повороту каждой из осей (x, ct) на угол α так, как показано на рисунке. Действительно, если взять событие A на прямой x', то связь координат x' и x этого события будет иметь вид:

$x = x'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = x'\cos\alpha_1 \Rightarrow \cos\alpha_1 = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$, это следует из преобразований Лоренца и из графика.

Тогда угол поворота оси времени α_2:

$$ct = ct'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = ct'\cos\alpha_2 \Rightarrow \cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.$$

По полученной диаграмме легко заключить, что событие P_1, происшедшее раньше события P_2 в K-системе, в K'-системе произойдёт позже P_1.

5. Релятивистская динамика

1) Энергия.

СТО утверждает, что, кроме известных в классической механике форм кинетической T и потенциальной U энергии, существует еще энергия покоя:

$$E_0 = mc^2.$$

Эта энергия должна учитываться в законе сохранения энергии.

Согласно СТО, тело массой m, которое движется со скоростью υ, обладает энергией

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

При условии $\upsilon << c$ $\quad E \approx mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}\right) = mc^2 + \frac{m\upsilon^2}{2} = E_0 + \frac{m\upsilon^2}{2}.$

Эксперименты с элементарными частицами и атомными ядрами показали, что при скоростях, близких к световым, равенство $E = E_0 + \frac{m\upsilon^2}{2}$ перестаёт выполняться. Поэтому кинетическую энергию следует определить как разность полной энергии E и энергии покоя E_0:

$$E_K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - mc^2.$$

Из этого определения следует, что при $\upsilon \to c$ кинетическая энергия $E_K \to \infty$, поэтому тело, обладающее массой, не может достигнуть скорости света в вакууме.

Нужно отметить, что выражение для полной энергии

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

не является общим, хотя бы потому, что не годится для частиц с нулевой массой – фотонов.

Для фотонов $E = h\nu = \frac{h\nu \cdot c}{c} = \frac{h}{\lambda}c = pc$, где $\frac{c}{\nu} = \lambda$ – длина волны, ν – частота,

$h = 2\pi\hbar = 2\pi \cdot 1{,}054 \cdot 10^{-34}$ $Дж \cdot с$ – постоянная Планка.

Общее выражение для полной энергии любого тела (частицы) имеет вид:

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}.$$

2) Релятивистский импульс.

Для замкнутой системы релятивистских частиц закон сохранения ньютоновского импульса не выполняется. Законы сохранения в классической механике непосредственно связаны со свойствами пространства и времени в инерциальных системах, а именно: сохранение энергии обусловлено однородностью времени, сохранение импульса обусловлено однородностью пространства, сохранение момента импульса обусловлено изотропностью пространства. Поэтому законы сохранения импульса в СТО взяты за основу, а сам классический импульс $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ пришлось подправить, как и энергию.

Сохраняющейся в любой замкнутой системе взаимодействующих тел при любых скоростях системы оказалась величина

$\vec{p} = \frac{\vec{\upsilon}E}{c^2}$, где $\vec{\upsilon}$ – скорость, а E – полная энергия.

Для тела с массой m импульс $\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}c^2}{c^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$.

Для фотонов $E = h\nu$.

А так как $\upsilon = c$, то импульс $p = \frac{c\nu h}{c^2} = \frac{h}{\lambda}$, где $\lambda = \frac{h}{p}$ – длина волны фотона.

3) Масса тела.

Масса может быть выражена из общего уравнения для полной энергии:

$$m = \sqrt{\frac{E^2}{c^4} - \frac{p^2}{c^2}}.$$

Из этой формулы не следует делать вывод о возрастании массы тела с увеличением скорости. Масса любой частицы и любого тела неизменна и не зависит от скорости, наоборот, изменение полной энергии и импульса происходит так, что

$$\sqrt{E^2 - p^2c^2} = mc^2 = const.$$

Фактически СТО даёт строгое определение инертной массы тела как массы покоя, что невозможно было сделать в классической механике. Инертная масса тела – это энергия покоя тела, делённая на c^2.

Релятивистская масса покоя инвариантна.

В СТО масса не является аддитивной величиной.

4) Связь между кинетической энергией и импульсом тела.

$$p^2c^2 = E^2 - m^2c^4 = \left(E - mc^2\right)\cdot\left(E + mc^2\right) = E_K\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + mc^2\right);$$

$$E_K = \frac{p^2}{m\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + 1\right)} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right).$$

При скоростях, много меньших скорости света $\upsilon << c$, кинетическая энергия частицы $E_K = \dfrac{p^2}{2m}$ приобретает классический вид.

5) Основное уравнение динамики.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right) = \vec{F}.$$

При этом *сила* $\vec{F}$ *не является релятивистским инвариантом.* В разных системах отсчёта её величина и направление будут различными.

Проекции силы, перпендикулярные направлению вектора относительной скорости системы, преобразуются следующим образом:

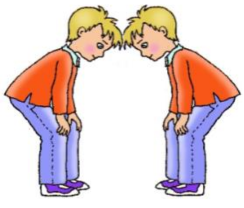
$$F'_y = F_y\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}.$$

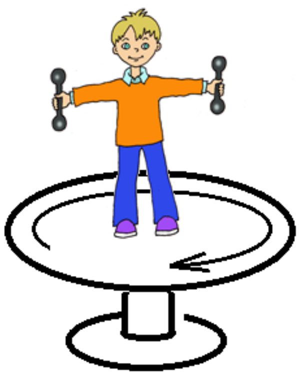
Продольная проекция силы сохраняется:

$$F'_x = F_x.$$

Закончить курс механики хочется словами великого Джеймса Клерка Максвелла: **«Если наш курс физики поможет кому-либо из вас увидеть пользу математики, это не только обеспечит успех вашего дальнейшего обучения, но и сделает менее вероятным его вред для вашего здоровья»**.

ОГЛАВЛЕНИЕ





Елена Николаевна АКСЕНОВА

ОБЩАЯ ФИЗИКА. МЕХАНИКА (ГЛАВЫ КУРСА)

Учебное пособие

Издание второе, исправленное

Зав. редакцией
естественнонаучной литературы *М. В. Рудкевич*
Ответственный редактор *С. В. Макаров*
Автор художественных образов *Е. А. Румянцева*
Корректор *Т. А. Кошелева*
Выпускающий *Н. А. Крылова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.10.07.953.П.1028
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
196105, Санкт-Петербург, пр. Ю. Гагарина, д. 1, лит. А.
Тел./факс: (812) 336-25-09, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 24.01.18.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 60×90 $^1/_8$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 16,00. Тираж 100 экз.

Заказ № 080-18.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в АО «Т8 Издательские Технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.